

Formoptimierung unter Nebenbedingungen durch Freiform-Deformationen

Vom Fachbereich Mathematik
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
genehmigte **Dissertation**

von
Dipl.-Math. Jochen Kai Hechler
aus Langen (Hessen)

Referent:	Prof. Dr. U. Reif
Koreferent:	Prof. Dr. S. Ulbrich
Tag der Einreichung:	25. Oktober 2006
Tag der mündlichen Prüfung:	15. Dezember 2006

Darmstadt 2006
D 17

INHALTSVERZEICHNIS

1	EINLEITUNG	5
2	GEOMETRISCHE OPTIMIERUNG	9
2.1	Geometrische Optimierungsprobleme in der Praxis	9
2.2	Allgemeines geometrisches Optimierungsproblem	15
2.3	Parametrisiertes geometrisches Optimierungsproblem	21
3	FREIFORM-DEFORMATION	25
3.1	FFD-Theorie	26
3.1.1	Lokale FFD	30
3.1.2	Globale FFD	32
3.1.3	Injektive FFD	35
3.1.4	Homotope FFD	38
3.2	Finite FFD-Räume	41
3.2.1	Flexibilität von FFD-Räumen	44
3.2.2	Polynomiale FFD	52
3.2.3	Spline FFD	61
3.3	Iterative FFD	68
3.3.1	Iterative finite FFD	69
4	FFD MIT GEOMETRISCHEN RESTRIKTIONEN	73
4.1	Globale Restriktionen	77
4.1.1	Injektivität	77
4.1.2	Volumen	79
4.1.3	Homotopie	81
4.2	Lokale Restriktionen	81
4.2.1	Hindernisrestriktionen	82
4.2.2	Fixierung	93
4.2.3	Fixierte Richtungen	104

5	OPTIMIERUNG	107
5.1	Optimierung ohne Nebenbedingungen	107
5.2	Optimierung mit Nebenbedingungen	114
5.3	Gradientenfreie Optimierung	116
6	ALGORITHMEN	119
6.1	FFD-Algorithmen	120
6.2	Iterierte global zulässige FFD-Algorithmen	125
6.3	Adaptive FFD-Algorithmen	129
6.3.1	FFD-Algorithmen mit Graderhöhung	129
6.3.2	FFD-Algorithmen mit Lokalisierung	132
6.4	Algorithmus für Raummodifikationen	133
7	ANWENDUNGEN	137
7.1	Minimierung der Seillänge	137
7.2	Minimalflächen	141
7.3	Volumenreduktion unter Nebenbedingungen	147
7.4	Deformation von Solids unter Belastung	148
7.5	Tragflächen	149
7.6	Booster	151
7.7	Federpendel	153
8	ZUSAMMENFASSUNG	155

1 EINLEITUNG

In vielen Anwendungen in der Numerik und in den Ingenieurwissenschaften sollen geometrische Objekte, wie Motoren, Karosserien, Reflektoren und ähnliches, hinsichtlich komplexer Funktionale optimiert werden. Die geometrischen Objekte liegen typischerweise parametrisiert vor und die Optimierung wird über die Menge $P := \{p_1, \dots, p_N\}$ der Freiheitsgrade der Parametrisierung realisiert. Bei geometrischen Objekten mit komplexer Geometrie ist die Menge der Freiheitsgrade typischerweise sehr groß. Da eine Auswertung der Funktionale oft aufwendig und für den Gradient eventuell gar nicht möglich ist, ist eine Optimierung nur schwer oder unter Umständen gar nicht realisierbar.

Das Prinzip der Freiform-Deformation (FFD) ermöglicht die Optimierung geometrischer Objekte unabhängig von ihrer Parametrisierung. Dabei wird anstelle des geometrischen Objekts der das Objekt umgebende Raum deformiert. Die Anzahl n der dafür benötigten Freiheitsgrade ist unabhängig von N . Häufig kann bereits für kleine Werte von $n \ll N$ bei iterierter Anwendung der Freiform-Deformation eine substantielle Verbesserung der Zielfunktion mit geringem Aufwand erreicht werden.

Das Prinzip der Freiform-Deformation wurde erstmals von Barr [Bar84] angegeben. Barr verwendete aber nur Drehungen, Skalierungen und Translationen zur Deformation des Raumes. Sederberg und Parry [SP86] verallgemeinerten den Ansatz von Barr und verwendeten Bersteinpolynome und Splines zur Parametrisierung des Raumes. Auf Coquillard [Coq90] geht die Extended FFD zurück, bei der die Parametrisierung des Raumes an die Struktur des im Raum enthaltenen geometrischen Objektes angepasst wird. Im weiteren Verlauf wurden Volumen-kontrollierende-Verfahren und Subdivisions-Verfahren zur Freiform-Deformation entwickelt (siehe [CA94],[MK96]). Die Freiform-Deformation kommt hauptsächlich beim Designen von geometrischen Objekten zum Einsatz. Sie eignet sich aber auch für digitale Wasserzeichen und zum Erstellen von Morphingsequenzen. In einem Spezialfall [Appo6] wurden Freiform-Deformationen bereits erfolgreich zur Optimierung eingesetzt. Aufgrund die-

ses Ergebnisses ist es sinnvoll, die Möglichkeiten der Optimierung mit Freiform-Deformationen näher zu betrachten. Ein Beispiel für eine Freiform-Deformation einer Kugel ist in Abbildung 1.1 gegeben.

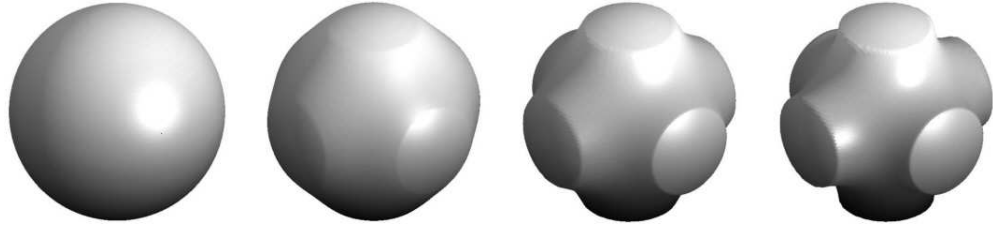


Abbildung 1.1: Freiform-Deformation einer Kugel.

Beim Optimieren mit Freiform-Deformationen (FFD) sind Funktionen

$$\psi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$$

als kleine Störungen $\Delta\psi$ der Identität \mathcal{I} gegeben, also

$$\psi := \mathcal{I} + \Delta\psi.$$

Um nun Freiform-Deformationen auf ein geometrisches Objekt im \mathbb{R}^d anzuwenden, wird eine Familie φ_A von Parametrisierungen des Raumes, in dem das Objekt enthalten ist, mit wenigen Freiheitsgraden $A := \{a_1, \dots, a_n\}$ verwendet.

Als Parametrisierungen des Raumes eignen sich Polynome für globale und B-Splines bzw. Tensorprodukt-B-Splines (TSB) für lokale Freiform-Deformationen. Ist typischerweise ein Objekt im \mathbb{R}^3 gegeben und φ_A die Menge aller trivariaten quadratischen Freiform-Deformationen, so ist die Anzahl der Freiheitsgrade $n = 30$.

Geometrische Bedingungen, wie fixierte Untermannigfaltigkeiten oder restringierte Deformationen des Objekts werden nicht durch Restriktionen an die Freiheitsgrade A , sondern durch eine geeignete Wahl der Parametrisierung des Raumes gewährleistet. Beispielsweise lassen sich Hindernisbedingungen durch eine Gewichtsfunktion w mit $\Delta\psi := w \cdot \Delta\tilde{\psi}$ realisieren. Ebenso lassen sich Fixierungen von Teilen des geometrischen Objekts durch gewichtete Raumüberlagerungen, zum Beispiel im \mathbb{R}^2 durch

$$\Delta\psi := w_1 \cdot \Delta\tilde{\psi}_1 + w_2 \cdot \Delta\tilde{\psi}_2,$$

erzielen. Die Arbeit gibt an, wie zu Hindernissen und Fixierungen flexible Raummodifikationen konstruiert werden, mit denen sich die Nebenbedingungen in den Raum der FFD-Funktionen integrieren lassen. Durch diese Integration der Restriktionen in die Parametrisierung des Raumes können restringierte Optimierungsprobleme auf nicht restringierte Optimierungsprobleme zurückgeführt werden.

Das Vorgehen bei der Optimierung mit FFD-Funktionen geschieht über einzelne FFD-Schritte. Jeder einzelne FFD-Schritt ist durch eine Freiform-Deformation des Raumes gegeben. Für einen FFD-Schritt wird hinsichtlich des gegebenen Funktionalis mittels der Freiheitsgrade A die optimale FFD-Funktion φ_A numerisch bestimmt. Anschließend wird überprüft, ob die erhaltenen Freiheitsgrade eine (injektive) FFD-Funktion erzeugen. Ist dies nicht der Fall, wird eine skalierte FFD-Funktion verwendet. Die generierte FFD-Funktion wird auf das geometrische Objekt angewendet und die Schritte werden wiederholt.

In Kapitel 2 werden zunächst einige Beispiele zu geometrischen Optimierungsproblemen gegeben, die später bei den Anwendungen wieder aufgegriffen werden. Daran schließen sich die Definition des geometrischen Optimierungsproblems und weitere zum Verständnis der Arbeit wichtige Definitionen an. Die FFD-Optimierung wird hauptsächlich mit injektiven homotopen global zulässigen FFD-Funktionen durchgeführt. In Kapitel 3 werden die Grundlagen zum Verständnis von injektiven, homotopen, und global zulässigen FFD-Funktionen angeführt. Im zweiten Teil des Kapitels 3 werden die finiten FFD-Funktionen behandelt. Es werden zum einen verschiedene finite FFD-Räume vorgestellt und der Begriff der Flexibilität einer Menge von FFD-Funktionen wird eingeführt. Mit Hilfe dieses Begriffes werden in Kapitel 4 flexible Raummodifikationen definiert, die eine Integration von geometrischen Nebenbedingungen in den Raum der FFD-Funktionen ermöglichen.

Anschließend wird in Kapitel 5 ein Überblick über die nichtlineare Optimierung sowohl mit als auch ohne Nebenbedingungen gegeben. Die dann in Kapitel 6 beschriebenen FFD-Optimierungsalgorithmen können mit Hilfe der im Kapitel 5 aufgeführten Verfahren angewendet werden. Diese Anwendungen sind in Kapitel 7 beschrieben, dabei werden verschiedene Beispiele aus Kapitel 3 erneut aufgegriffen. Ein Überblick über die in der Arbeit gewonnenen Erkenntnisse und der noch offenen Fragen wird in Kapitel 8 gegeben.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Ulrich Reif für die kom-

petente Betreuung meiner Arbeit bedanken. Außerdem bei den Mitgliedern der Arbeitsgruppe "Differentialgeometrie und Geometrische Datenverarbeitung" des Fachbereichs Mathematik an der Technischen Universität Darmstadt. Insbesondere bei Herrn Dr. Bernhard Mössner, der mir stets bei fachlichen und praktischen Problemen und Fragen weiter geholfen hat und bei Frau Sybille Drexler für ihre vielseitige Unterstützung.

Mein Dank geht auch an die Mitglieder meines Arbeitsraumes, Dr. Annika Wille, Dipl. Math. Niklas Niemann und Dipl. Math. Carmen Allhoff, für das angenehme Arbeitsklima und hilfreiche mathematische Diskussionen.

Ebenfalls bedanke ich mich bei meinen Eltern, Ute und Karl-Heinz Hechler, die immer für mich da waren und mir das Studium ermöglicht haben und bei Nailya Akhmedova, die mein Leben in wundervoller Weise bereichert hat.

2 GEOMETRISCHE OPTIMIERUNG

Die Optimierung von geometrischen Objekten kommt in der Praxis vor allem bei ingenieurwissenschaftlichen Anwendungen sehr häufig vor. So müssen in vielen Bereichen der Automobil- und Flugzeugindustrie Bauteile bezüglich ihrer geometrischen Form optimiert werden, um beispielsweise die Aerodynamik, die Stabilität oder das Gewicht zu verbessern. Aber auch in der Computergrafik wird die geometrische Struktur komplexer Objekte optimiert. Im Folgenden werden verschiedene vereinfachte, aber typische Problemstellungen aus den Ingenieursanwendungen vorgestellt.

2.1 GEOMETRISCHE OPTIMIERUNGSPROBLEME IN DER PRAXIS

Als erstes betrachten wir ein sehr stark vereinfachtes Beispiel aus dem Bereich der Optimierung.

Beispiel 2.1 (Minimierung der Länge eines Seiles). *Gegeben seien zwei Punkte $P = (0.1, 0.2)$ und $Q = (0.9, 0.3)$. Beide Punkte sind fest mit einem Seil $s: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ verbunden. Die Startgeometrie des Seiles ist gegeben durch*

$$s(t) = (0.1 + 0.8t, 0.2 + 1.1t - 2t^2) = (x(t), y(t)). \quad (2.1)$$

Die Länge L des Startseiles s berechnet sich damit wie folgt

$$L(s) = \int_0^1 \sqrt{0.8^2 + (1.1 - 4t)^2} \approx 1,527. \quad (2.2)$$

Zwischen den beiden Punkten P und Q sei ein Hindernis W , ein Kreis mit Radius $r = 0.1$ um den Punkt $w = (0.5, 0.25)$, gegeben (siehe Abbildung 2.1). Das Ziel ist, die Länge des Seiles s , also die Bogenlänge $L(s)$, zu minimieren.

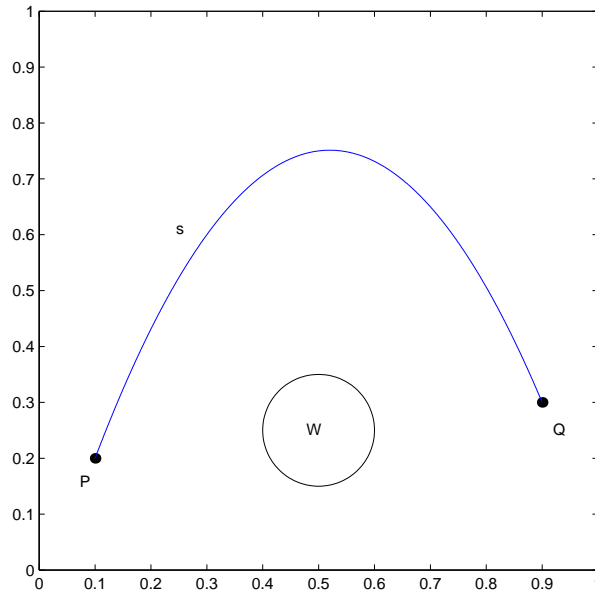


Abbildung 2.1: Seil s zwischen P und Q um das Hindernis W

Außerdem sollen Anfang und Ende des Seiles fest mit den Punkten P und Q verbunden sein und das Seil darf nicht in das Hindernis W eindringen. Wir erhalten also das folgende nichtlineare Optimierungsproblem:

$$\min_{s \in C^1} L(s) = \min_{s \in C^1} \int_0^1 \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} \quad (2.3)$$

mit $s \in C^1((0,1), \mathbb{R}^2)$ und den Nebenbedingungen

$$s(0) - P = 0 \quad (2.4)$$

$$s(1) - Q = 0 \quad (2.5)$$

$$\min_{t \in [0,1]} |s(t) - w| \geq 0.1. \quad (2.6)$$

Betrachtet man Abbildung 2.1, so wird deutlich, wie das Seil verlaufen muss. Stellt man sich vor, dass an den beiden Enden des Seiles, in den Punkten P und Q , in entgegengesetzter Richtung gezogen wird, so würde sich das Seil dem Hindernis nähern, bis es das Hindernis berührt. Wäre das Hindernis nicht vorhanden, so würde man als Seil s^*

$$s^*(t) = P + t \overrightarrow{PQ} \quad (2.7)$$

mit $L(s^*) = 0.8062$ erhalten. Diese Lösung ist allerdings nicht zulässig, da

$$\min_{t \in [0,1]} \|s(t) - w\|_2 < 0.05 \quad (2.8)$$

gilt.

□

Betrachten wir als nächstes ein Beispiel aus der Differentialgeometrie.

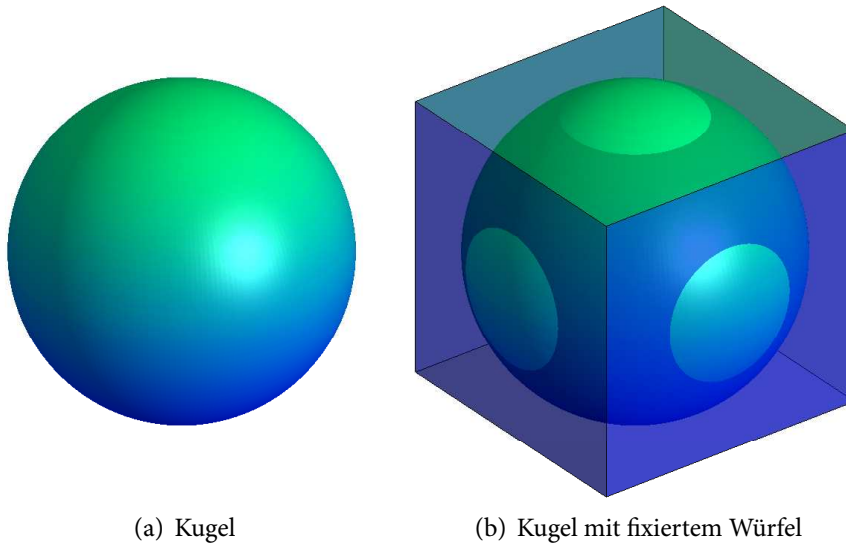


Abbildung 2.2: In Würfel eingespannte Kugel

Beispiel 2.2 (Minimalfläche mit Randbedingungen). Wir betrachten eine Kugel K mit Radius $r = 1$ im \mathbb{R}^3 (siehe Abbildung 2.2(a)), gegeben durch

$$f: [0, 2\pi) \times [0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (2.9)$$

mit

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \\ \chi(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Der Flächeninhalt ΔK ist gegeben durch

$$\Delta K(f) = \iint_{\Gamma} \sqrt{EG - F^2} dudv \quad (2.11)$$

mit

$$\Gamma = [0, 2\pi) \times [0, \pi) \quad (2.12)$$

$$E = \varphi_u^2 + \psi_u^2 + \chi_u^2 \quad (2.13)$$

$$F = \varphi_u \varphi_v + \psi_u \psi_v + \chi_u \chi_v \quad (2.14)$$

$$G = \varphi_v^2 + \psi_v^2 + \chi_v^2. \quad (2.15)$$

Alle Punkte $p \in K$, die außerhalb des Würfels, gegeben durch $[-0.8, 0.8]^3$, liegen, sind fixiert (siehe Abbildung 2.2(b)). Weiter sei

$$K_A := \{p \in K \mid \|p\|_{\infty} \geq 0.8\} \quad (2.16)$$

die Menge aller Punkte außerhalb des Würfels.

Gesucht ist nun eine deformierte Kugel K_d , gegeben durch eine Parametrisierung $g \in H^1(\Gamma, \mathbb{R}^3)$, deren Flächeninhalt minimal ist. Man erhält das folgende nichtlineare Optimierungsproblem

$$\min_{g \in H^1(\Gamma, \mathbb{R}^3)} \Delta K(g) = \iint_{\Gamma} \sqrt{E(g)G(g) - F(g)^2} dudv \quad (2.17)$$

mit der Nebenbedingung

$$K_A \subseteq g(\Gamma) \quad (2.18)$$

In diesem Fall handelt es sich um ein symmetrisches Beispiel. Es ist aber durchaus denkbar, den Würfel asymmetrisch zu wählen oder den Mittelpunkt des Würfels zu verschieben. Dabei ist darauf zu achten, dass für große Streckungen $r_s > 0.9$ die Minimalfläche nicht zusammenhängend sein kann. Dieses Beispiel wird in Kapitel 7.2 weiter behandelt.

□

Das nächste Beispiel wurde zusammen mit der Firma *inutech GmbH, Nürnberg*¹, bearbeitet.

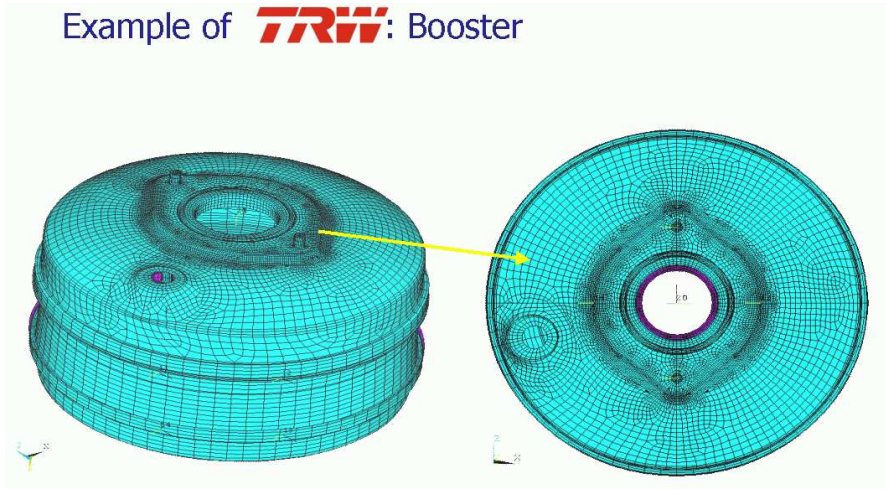
Example of **TRW**: Booster

Abbildung 2.3: Booster für ein Auto

Beispiel 2.3 (Booster). Wir betrachten ein Bauteil eines Motors, einen Booster (siehe Abbildung 2.3). Dieser Booster wird an drei anderen Bauteilen angeschlossen. Ein Anschluss befindet sich an der Unterseite des Boosters, hier wird das Bauteil auf ein anderes aufgeschraubt. Die beiden anderen Anschlüsse kann man im rechten Bild sehen. Der erste der drei Anschlüsse ist in Form einer Zitrone gegeben, die anderen Anschlüsse sind Kreise, einer davon seitlich der Zitronenform, der andere an der Unterseite des Bauteiles. Der Booster liegt als FE-Netz P mit 9000 FE-Knoten vor. Weiter existiert eine Funktion $f: P \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, die dem Booster, gegeben durch das FE-Netz, ein Volumen V zuweist.

Die Punktemengen, die zu den fixierten Bereichen gehören, werden mit A_1 , A_2 und A_3 bezeichnet. Die Menge der fixierten Punkte umfasst 2700 Punkte. Es sind also 6300 nicht fixierte FE-Knoten vorhanden. Diese freien FE-Knoten sollen nun so angeordnet werden, dass das Volumen f des Boosters minimal wird und die von-Mises Vergleichsspannungen σ_P unterhalb einer gegebenen Schranke bleiben.

Gesucht ist also

$$\min_{P \subseteq \mathbb{R}^3} f(P) \quad (2.19)$$

¹Die Bilder und Daten sind aus einem Projekt der Firma *inutech GmbH*, Nürnberg, (siehe [RVR01])

mit der Nebenbedingung

$$\|\sigma_f(P)\|_\infty \leq M, \quad (2.20)$$

wobei die topologische Struktur des Boosters nicht verändert werden darf. Außerdem sind die fixierten Punkte nicht zu verändern.

Bevor der Booster mit Hilfe der FFD-Optimierung optimiert wurde, wurde der folgende Ansatz gemacht: Um die Anzahl der 6300 Optimierungsparameter zu reduzieren, wurde der Booster mit Hilfe von Tensorprodukt-B-Splines parametrisiert. Der dabei entstandene Raum ist durch 400 Parameter gegeben. Die hohe Zahl der Parameter machte eine Optimierung in diesem Raum schwierig. Eine weitere Reduktion der Parameter ist aufgrund der fixierten Punktmengen nicht möglich. Dabei ist zu beachten, dass dieses geometrische Objekt ein Graph über der xy -Ebene ist und daher einfach zu parametrisieren ist. Für andere geometrische Objekte, die kein Graph über dem \mathbb{R}^2 sind, wäre dieser Ansatz nicht oder nur lokal durchführbar.

□

Das letzte Beispiel beschäftigt sich ebenfalls mit Spannungen an einem Bauteil.

Beispiel 2.4 (Stutzen). Wir betrachten einen Röhrenstutzen, an dem zwei Rohre miteinander verbunden sind. Der Stutzen ist beschrieben durch $\Gamma: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]^3$. Ziel der Optimierung ist die Reduzierung des Materials des Stutzens, ohne zu hohe Spannungsspitzen zu erhalten. Die von-Mises-Vergleichsspannungen σ sind durch eine Konstante $M > 0$ beschränkt.

Zur Vereinfachung der Optimierung betrachten wir ein Viertel des Stutzens. Sei f eine Funktion, die einem geometrischen Objekt u , gegeben durch Γ , einen Wert $x \in \mathbb{R}$ zuweist. Die genaue Definition von f sei nicht bekannt, es existiere aber eine Black-Box mit der f ausgewertet werden kann. Um die Symmetrie zu erhalten, ist die Fläche am Rand fixiert und die Normalenrichtung der Fläche am Rand vorgeschrieben. Man bekommt das folgende Optimierungsproblem

$$\min_{\Gamma \in C^2} f(\Gamma) \quad (2.21)$$

mit den Nebenbedingungen

$$\|\sigma_\Gamma(\Gamma)\|_\infty \leq M. \quad (2.22)$$

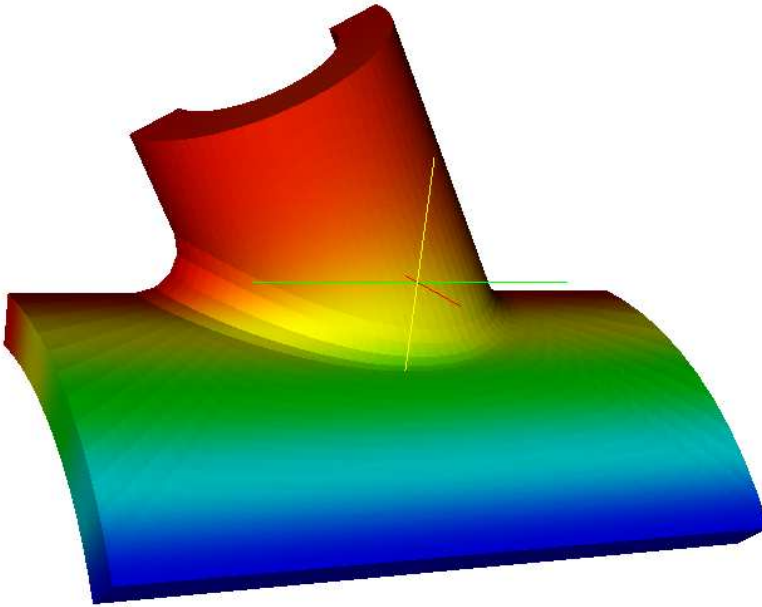


Abbildung 2.4: Stutzen

2.2 ALLGEMEINES GEOMETRISCHES OPTIMIERUNGSPROBLEM

Nach den einführenden Beispielen soll im Folgenden das Allgemeine nichtlineare Optimierungsproblem beschrieben werden. Im Allgemeinen beschäftigt sich die geometrische Optimierung mit geometrischen Objekten in \mathbb{R}^d .

Definition 2.1. Ein geometrisches Objekt u im \mathbb{R}^d ist eine Menge von Punkten $p \in \mathbb{R}^d$, also $u \subseteq \mathbb{R}^d$.

Betrachtet man Beispiel 2.1, dann ist die Menge aller stetig differenzierbaren Kurven im \mathbb{R}^2 die Menge der geometrischen Objekte und das gesuchte Objekt ist ein geometrisches Objekt aus dieser Menge. Allerdings sind in dieser Menge noch geometrische Objekte enthalten, die keine Lösung des gegebenen Problems sein können. So sind zum Beispiel Kurven, die durch das Hindernis W verlaufen, nicht zugelassen.

Als nächstes benötigt man eine Metrik auf der Menge der geometrischen Objekte. Hier bietet sich die Hausdorffmetrik (siehe z.B. [Zei91], S. 449) an.

Definition 2.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Falls $A, B \subseteq X$ zwei Mengen sind, dann ist der Hausdorffabstand $D_H(A, B)$ der Mengen definiert als

$$D_H(A, B) := \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A) \right\}, \quad (2.23)$$

wobei $d(a, B) = \inf_{b \in B} d(a, b)$ der Abstand des Punktes a von der Menge B ist.

Eine weitere sinnvolle, da in der Praxis oft verwendete, Einschränkung der Menge der geometrischen Objekte im Sinne der geometrischen Optimierung ist die Einschränkung auf die Homöomorphismenklassen von u . Dabei wird ein Homöomorphismus zwischen zwei geometrischen Objekten u und v wie folgt definiert.

Definition 2.3. Seien $u, v \subseteq \mathbb{R}^d$. Eine Abbildung $\chi: u \rightarrow v$ heißt Homöomorphismus, wenn χ stetig und bijektiv und die Umkehrabbildung χ^{-1} ebenfalls stetig ist.

- Die Homöomorphismenklasse \mathcal{H}_u ist gegeben durch

$$\mathcal{H}_u := \{v \subseteq \mathbb{R}^d \mid u \cong v\}. \quad (2.24)$$

- $u \cong v$ bedeutet, dass ein Homöomorphismus χ existiert, mit $\chi(u) = v$.

In Beispiel 2.1 bedeutet dies, dass z.B. Kurven die einen Doppelpunkt enthalten, nicht in \mathcal{H}_u liegen, falls u die in dem Beispiel 2.1 vorgegebene Startkurve ist. Mit der Stetigkeit von χ ist hier die Stetigkeit bezüglich des Raumes Ω und der Hausdorffmetrik gemeint.

Nun kann ein Funktional auf der Menge der geometrischen Objekte definiert werden. Der Definitionsbereich \mathcal{D} sei eine Untermenge von $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^d)$. Dann sei f ein stetiges Funktional bezüglich des Hausdorffabstands D_H

$$f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.25)$$

welches zu minimieren ist. Gesucht ist

$$u^* = \operatorname{argmin}\{f(u) \mid u \in \mathcal{D}\}, \quad (2.26)$$

also das geometrische Objekt u^* , das bezüglich des Funktionals f minimal ist. In Beispiel 2.1 ist $f(c)$ gegeben durch die Bogenlänge von c . Zwar ist f nicht stetig bezüglich der Hausdorffmetrik, aber für die Minimierung genügt die Unterhalbstetigkeit, die f erfüllt.

Bemerkung 2.1. Der Ansatz der Minimierung eines Funktionals ist hier willkürlich gewählt, genauso gut könnte die Maximierung, also die Minimierung von $-f$, betrachtet werden. Allerdings hat sich in der Optimierung der Minimierungsansatz durchgesetzt.

Das Optimierungsproblem wird in vielen Fällen durch Nebenbedingungen restringiert.

Definition 2.4. Gleichungen und Ungleichungen der Form

$$h: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{m_1} \text{ und } g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{m_2} \quad (2.27)$$

mit

$$h(u) = 0 \text{ und } g(u) \geq 0 \quad (2.28)$$

heißen Nebenbedingungen oder Restriktionen für geometrische Objekte. Ein Optimierungsproblem mit $m_1 > 0$ oder $m_2 > 0$ heißt restringiertes Optimierungsproblem. Für $m_1 = 0$ oder $m_2 = 0$ entfällt die jeweilige Nebenbedingung.

Dabei sind die Gleichungen (2.28) komponentenweise zu verstehen, das heißt $h_i = 0$ und $g_j \geq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq m_1$ und alle $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq j \leq m_2$.

Bemerkung 2.2. Es gibt eine Reihe von Nebenbedingungen, wie zum Beispiel die Erhaltung der topologischen Struktur, die sich nicht oder nur schwer in Form von Gleichungen oder Ungleichungen schreiben lassen. Diese werden, falls vorhanden, gesondert angegeben.

Als nächstes wird die Menge \mathcal{Z} der geometrischen Objekte, die mögliche Lösungen des restringierten Optimierungsproblems sind, definiert.

Definition 2.5. Ein geometrisches Objekt $u \in \mathcal{D}$ heißt zulässig, falls $h(u) = 0$ und $g(u) \geq 0$ gilt. Die Menge aller zulässigen geometrischen Objekte u wird mit \mathcal{Z} bezeichnet.

Beispiel 2.5. In Beispiel 2.1 sind jene Kurven c zulässig, die in P beginnen und in Q enden und die nicht durch W hindurch gehen.

Im Folgenden gehen wir davon aus, dass die Menge der zulässigen geometrischen Objekt nicht leer ist, also $\mathcal{Z} \neq \emptyset$. Vielmehr existiert ein Startobjekt u_0 , das die Nebenbedingungen erfüllt und somit in \mathcal{Z} liegt.

Definition 2.6. Das nichtlineare geometrische Optimierungsproblem NLO ist gegeben durch

$$\text{NLO} \left\{ \begin{array}{l} \text{Sei } \mathcal{D} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^d), \\ f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \\ h: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}, g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{m_2} \\ \mathcal{Z} := \{u \in \mathcal{D} \mid h(u) = 0, g(u) \geq 0\} \\ \text{Gesucht:} \\ u^* = \operatorname{argmin}\{f(u) \mid u \in \mathcal{Z}\}. \end{array} \right. \quad (2.29)$$

Dabei sei $f, g, h \in C^0(\mathcal{D})$.

Bemerkung 2.3. Es bleibt anzumerken, dass die Lösbarkeit des nichtlinearen geometrischen Optimierungsproblems von den Eigenschaften von \mathcal{Z} abhängt. Die Existenz eines Minimums ist nur sicher, falls \mathcal{Z} kompakt ist. Falls \mathcal{Z} abgeschlossen ist, so konvergieren die in Kapitel 5 vorgestellten Optimierungsverfahren gegen ein Minimum oder erzeugen eine Folge von streng monoton fallenden Funktionswerten. Ist \mathcal{Z} offen, so muss kein Minimum existieren. Falls nichts anderes angegeben ist, liegt \mathcal{Z} abgeschlossen vor.

Weiter sei bemerkt, dass auf die Lösbarkeit von Optimierungsproblemen in dieser Arbeit nicht näher eingegangen wird. Die Theorie, die sich mit der Lösbarkeit beschäftigt ist in [Spe93] und [CGToo] beschrieben. Vielmehr soll in dieser Arbeit ein alternativer Ansatz, die Optimierung mit FFD-Funktionen, zur Lösung von Optimierungsproblemen gegeben werden. Aus diesem Grund gehen wir davon aus, dass die Optimierungsprobleme, die in dieser Arbeit vorkommen, lösbar sind.

Beispiel 2.6. Für Beispiel 2.1 ergibt sich damit das folgende Optimierungsproblem. Die betrachteten geometrischen Objekte sind die Kurven, die homöomorph zu der Startkurve s sind. Das zu minimierende Funktional ist gegeben durch (2.3). Der Definitionsbereich des Funktionals \mathcal{D} ist gegeben durch

$$\mathcal{D} := \mathcal{H}_s. \quad (2.30)$$

Dabei sei $D(\cdot, \cdot)$ die von der euklidischen Metrik induzierte Hausdorffmetrik. Die Nebenbedingungen h und g haben die Form

$$h(v) = \left(\min_{p \in v} |p - P| \right) = 0 \quad (2.31)$$

und

$$g(v) = \min_{p \in v} |p - w| - 0.1 \geq 0. \quad (2.32)$$

□

Bevor wir zu den Grundlagen der FFD-Optimierung kommen, werden noch einige Klassifizierungen von Optimierungsproblemen angeführt. Für detaillierte Angaben zu den gemachten Definitionen sei auf [Spe93] und [CGToo] verwiesen.

Definition 2.7. Mit e_i wird der i -te Einheitsvektor im \mathbb{R}^d , gegeben durch

$$e_i := (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{d-i}), \quad (2.33)$$

definiert.

Definition 2.8. Sei V ein Raum mit einer Metrik d . Mit $B_\epsilon(x^*)$ wird die offene ϵ -Kugel um den Punkt $x^* \in V$ bezeichnet, also

$$B_\epsilon(x^*) := \{x \in V \mid d(x, x^*) < \epsilon\}. \quad (2.34)$$

Insbesondere werden Kugeln um geometrische Objekte $u \subseteq \Omega$ bezüglich der Hausdorffmetrik betrachtet.

In vielen Fällen ist es nicht oder nur schwer möglich, das globale Minimum eines Funktionals zu bestimmen. Viele der heutzutage verwendeten Algorithmen dienen aus diesem Grund nur zur Bestimmung von *lokalen* Minima.

Definition 2.9. $u^* \in \mathcal{Z}$ heißt lokales Minimum oder lokale Lösung von NLO, falls es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass für alle $u \in \mathcal{Z}$ mit $|u - u^*| < \epsilon$ die Ungleichung

$$f(u) \geq f(u^*) \quad (2.35)$$

gilt.

Bemerkung 2.4. Obwohl im weiteren Verlauf der Arbeit nur solche Verfahren betrachtet werden, die nach lokalen Minima suchen, eignen sich die Methoden der FFD-Optimierung sehr gut für die globale Optimierung. Bei der globalen Optimierung ist eine kleine Anzahl von Optimierungsparametern im Gegensatz zu

den Verfahren für lokale Minima viel entscheidender. Die FFD-Optimierung bietet hier, durch eine starke Reduktion der Optimierungsparameter die Möglichkeit, globale Optimierungsverfahren für Probleme zu verwenden, die vorher aufgrund einer hohen Parameterzahl mit globalen Optimierungsverfahren nicht effizient zu lösen waren.

Definition 2.10. Ein lokales Minimum u^* heißt isoliertes lokales Minimum, falls

$$f(u) > f(u^*) \quad (2.36)$$

für alle $u \in B_\epsilon(u^*) \cap \mathcal{Z}$, $u \neq u^*$ gilt, sich also in unmittelbarer Nähe des lokalen Minimums kein weiteres zulässiges lokales Minimum befindet. Ein Punkt $u^* \in \mathcal{Z}$ heißt globales Minimum, falls

$$f(u^*) \leq f(u) \quad (2.37)$$

für alle $u \in \mathcal{Z}$. Das globale Minimum heißt isoliert, falls $f(u^*) < f(u)$ für alle $u \in B_\epsilon(u^*) \cap \mathcal{Z}$, $u \neq u^*$ gilt.

Ein weiterer Begriff ist die Niveaumenge eines Funktionals. Diese gibt zu einem vorgegebenen geometrischen Objekt die Menge aller geometrischen Objekte an, die bezüglich des Funktionals kleiner oder gleich dem vorgegebenen geometrischen Objekt sind.

Definition 2.11. Die Niveaumenge $N_f(u_0)$ im Punkt u_0 ist gegeben durch

$$N_f(u_0) := \{u \in \mathcal{Z} \mid f(u) \leq f(u_0)\}. \quad (2.38)$$

Zum Ende dieses Kapitels soll noch kurz der Zusammenhang der Niveaumenge N_f und der Existenz von Lösungen angegeben werden.

Theorem 2.1. Sei f stetig und die Menge der zulässigen geometrischen Objekte \mathcal{Z} sei nicht leer. Fall es ein $u_0 \in \mathcal{Z}$ gibt, für das die Niveaumenge $N_f(u_0)$ kompakt ist, so existiert ein globales Minimum u^* des nichtrestringierten Optimierungsproblems NLO.

Beweis. Nach der Definition von $N_f(u_0)$ kommen nur geometrische Objekte in $N_f(u_0)$ als globale Minima des nichtrestringierten Optimierungsproblems in Frage. Da N_f nach Voraussetzung kompakt ist, nimmt nach dem Satz von Weierstraß die stetige Funktion f ihr Minimum u^* auf N_f an. Damit ist u^* globales Minimum von f . \square

2.3 PARAMETRISIERTES GEOMETRISCHES OPTIMIERUNGSPROBLEM

In dieser allgemeinen Form (wie in Definition 2.6) ist ein Optimierungsproblem numerisch nicht oder nur schwer lösbar, da die Dimension der Menge der zulässigen geometrischen Objekt meist sehr hoch ist und die Auswertung kompliziert sein kann. Deswegen vereinfacht man in der Praxis das Optimierungsproblem (2.6), indem man die Menge der geometrischen Objekt \mathcal{Z} geeignet parametrisiert. Anschließend wird die Optimierung über die Menge der parametrisierten Objekte durchgeführt. Für die Optimierung mit FFD-Funktionen ist es nicht nötig, das geometrische Objekt zu parameterisieren. Vielmehr ist es sinnvoller, mit Hilfe der FFD-Optimierung das geometrische Objekt zu deformieren und es nur zur Auswertung zu parametrisieren. Da aber in der Realität die geometrischen Objekte oft bereits als parametrisierte Objekte vorliegen, sollen im Folgenden parametrisierte geometrische Objekte betrachtet werden. Bevor die allgemeine Theorie angegeben wird, betrachten wir ein Beispiel.

Beispiel 2.7. *Man betrachte das Booster-Beispiel 2.3. Sei*

$$F(s, t) = \sum_{i=1}^N b_i(s, t) p_i$$

eine Parametrisierung des Boosters durch bikubische Tensorprodukt B-Splines b_i mit Kontrollpunkten p_i . Dann findet die Optimierung des parametrisierten Boosters in dem Raum der Kontrollpunkte $p \subseteq \mathbb{R}^3$ der bikubischen Tensorprodukt B-Splines statt. Dann ist ein deformierte Booster \tilde{F} gegeben durch

$$\tilde{F}(s, t) = \sum_{i=1}^N b_i(s, t) \psi(p_i).$$

Ausgehend von dem Beispiel soll die Optimierung von parametrisierten Objekten betrachtet werden. Sei $u \subseteq \mathbb{R}^d$ das geometrische Objekt und

$$\Gamma: \mathbb{R}^{N \times m} \rightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{R}^d)$$

eine Parametrisierung des Raumes der geometrischen Objekte mit den Parametern $P = \{p_1, \dots, p_N\}$, $p_i \in \mathbb{R}^m$. Dabei sollen die Parameter p_u bezüglich der Hausdorffmetrik eine geeignete Näherung an u darstellen. Die Parameter

p_1, \dots, p_N können als geometrisches Objekt $P := \{p_1, \dots, p_N\}$ im $\Omega_P \subseteq \mathbb{R}^m$ betrachtet werden. Die FFD-Optimierung kann mit dem geometrischen Objekt P über \mathbb{R}^m durchgeführt werden. Da meist $m \ll N$ gilt, erhält man ein niedriger dimensionales Optimierungsproblem als bei der Optimierung über die einzelnen Parameter p_i .

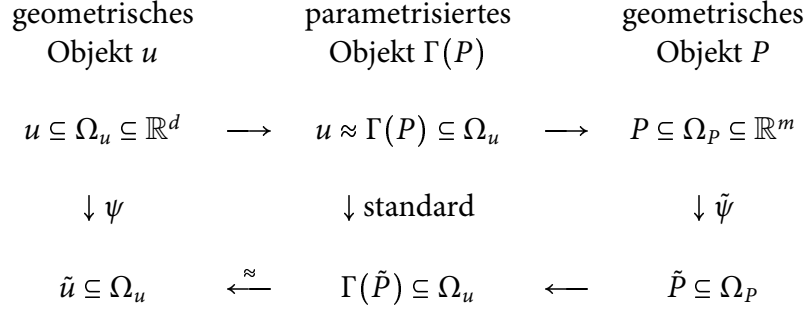


Abbildung 2.5: FFD für parametrisierte und nicht parametrisierte Objekte

Betrachtet man nun das sich daraus ergebende parametrisierte nichtlineare Optimierungsproblem, so erhält man das Standard-Optimierungsproblem wie in [Spe93] beschrieben.

Definition 2.12. Das parametrisierte nichtlineare Optimierungsproblem ist gegeben durch

$$\text{NLP} \left\{ \begin{array}{l} \text{Sei } f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \\ h: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}, g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{m_2} \\ \mathcal{Z} := \{\Gamma(P) \subseteq \mathbb{R}^d \mid h(\Gamma(P)) = 0, g(\Gamma(P)) \geq 0\} \\ \text{Gesucht:} \\ P^* = \operatorname{argmin}\{f(\Gamma(P)) \mid \Gamma(P) \in \mathcal{Z}\} \\ u^* := \Gamma(P^*). \end{array} \right. \quad (2.39)$$

Dabei sei $f, g, h \in C^0(\mathcal{D})$.

Damit erhält man ein numerisch vergleichsweise einfaches Optimierungsproblem. Der Optimierungsbereich wurde auf endlich viele Parameter, über die man nun optimieren muss, reduziert, während bei den vorher betrachteten Optimierungsproblemen noch über die Menge der geometrischen Objekte optimiert wurde. Allerdings ist eine Lösung $\Gamma(P^*)$ des parametrisierten Optimierungsproblems in der Regel keine Lösung des ursprünglichen Optimierungsproblems, da durch die Diskretisierung der Lösungsraum verkleinert wird. Die

Lösungen des parametrisierten Optimierungsproblems sind also nur Approximationen von Lösungen des nicht parametrisierten Problems. Darüber hinaus wird durch die Diskretisierung die Überprüfung und Einhaltung der Nebenbedingungen erschwert. Meistens werden die Nebenbedingungen nicht exakt eingehalten und die Lösungen halten die Nebenbedingungen nur Näherungsweise ein.

Beispiel 2.8. In vielen Fällen, zum Beispiel bei der Anwendung von FE-Methoden, erfolgt die Parametrisierung des geometrischen Objekts durch stückweise lineare Interpolation von FE-Knoten $p_i \in \mathbb{R}^d, 1 \leq i \leq k$ mit $k \gg d$. Dann sind die Parameter P gegeben durch die Interpolationspunkte p_i . In diesen Fällen kann man die Parameter als geometrisches Objekt $P \subseteq \mathbb{R}^d$ gegeben durch

$$P = (p_1, \dots, p_N), p_i \in \mathbb{R}^d \quad (2.40)$$

zusammenfassen. Die anschließende Optimierung findet dann anhand des geometrischen Objekts $P \subseteq \Omega_P \subseteq \mathbb{R}^d$ und nicht über die einzelnen Parameter $(p_i)_j$ mit $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, d$ statt. In diesem speziellen Fall gilt $P \subseteq \Gamma(P)$. Dies ist für die weitere Vorgehensweise in der FFD-Optimierung von Vorteil, aber nicht notwendig. Durch die Verwendung von Polynomen oder Splines zur Parametrisierung ist $P \subseteq \Gamma(P)$ im Allgemeinen nicht mehr gegeben. Dies führt zu einer schwierigeren Integration der Nebenbedingungen in die FFD-Räume.

Die Parametrisierung von geometrischen Objekten birgt einige Probleme, die hier nur kurz erwähnt werden sollen. Für einen ausführlicheren Exkurs in die Approximationstheorie sei auf [CK81], [Kü98] oder [Wat80] verwiesen. Bei der Parametrisierung ist es wünschenswert, das geometrische Objekt mit möglichst wenigen Parametern möglichst genau zu approximieren, da eine hohe Anzahl von Parametern zu einer hohen Zahl von Optimierungsparametern und damit zu einer schwierigen Optimierung führt. Für komplexe geometrische Objekte kann die Zahl der Parameter sehr groß werden.

Trotzdem wird in der geometrischen Optimierung der Ansatz verfolgt, erst das geometrische Objekt geeignet zu parametrisieren und dann über die Parameter zu optimieren. Der bei der Diskretisierung entstandene Fehler kann allerdings dazu führen, dass die gefundenen Ergebnisse mit starken Fehlern behaftet oder nicht zulässig sind. Als Alternative bietet sich die Möglichkeit, das geometrische Objekt zu optimieren, *ohne* das geometrische Objekt zu diskretisieren.

Definition 2.13. Ein parametrisiertes Optimierungsproblem NLO heißt

- gleichungsrestringiert, falls $m_2 = 0$ ist, die Ungleichungen $g(x) \geq 0$ also wegfallen.
- linear, falls alle Gleichungen affin sind. Also

$$f(x) = c^T x, \quad (2.41)$$

$$g(x) = Ax - b, \quad (2.42)$$

$$h(x) = Bx - d \quad (2.43)$$

mit $c, b, d \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times m_1}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m_2}$ gilt.

- quadratisch, falls die Zielfunktion quadratisch ist, also

$$f(x) = c^T x + \frac{1}{2} x^T H x \quad (2.44)$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$ und $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- konvex, falls f und g konvex sind und h linear ist.

3 FREIFORM-DEFORMATION

Um die Methoden der FFD (Freiform-Deformation) in der Optimierung zu verwenden, wird die Theorie der FFD in diesem Kapitel für Optimierungsprobleme konkretisiert. Dabei wird versucht, die Theorie so zu fassen, dass Optimierungsalgorithmen aus Kapitel 5 möglichst einfach zu FFD-Optimierungsalgorithmen erweitert werden können (siehe Kapitel 6). Dazu betrachten wir in diesem Kapitel die Veränderung der nichtlinearen Optimierungsprobleme durch die Anwendung von FFD-Funktionen. Innerhalb dieses Kapitels werden Begriffe aus der Topologie verwendet, die z. B. in [BJ73], [Hu64] und [Jä80] nachzulesen sind.

Zuerst wird der allgemeine Ansatz für FFD-Räume betrachtet und die Theorie für diese angegeben. Innerhalb des Kapitels werden *lokale* und *globale* FFD-Funktionen besprochen, dabei bezieht sich das Adjektiv auf die Zulässigkeit der FFD-Funktionen. Lokale FFD-Funktionen sind solche Funktionen, die zu einem festen gegebenen geometrischen Objekt zulässig sind. Globale FFD-Funktionen sind für alle zulässigen geometrischen Objekte zulässig. Während es bei den lokalen FFD-Funktionen möglich ist, mit wenigen Voraussetzungen die Äquivalenz eines geometrischen Optimierungsproblems und eines FFD-Optimierungsproblems zu zeigen, ist dies bei den globalen FFD-Funktionen nicht möglich. Allerdings ermöglichen die globalen FFD-Funktionen den Einsatz von nicht-restringierten Optimierungsverfahren (siehe Kapitel 5) und sind daher in der Praxis zu bevorzugen.

Danach werden die finiten FFD-Funktionen eingeführt und ein geeigneter Begriff zu deren Klassifizierung, die Flexibilität, vorgestellt. Während sich dieses Kapitel hauptsächlich mit nicht restringierten FFD-Räumen befasst, werden in Kapitel 4 spezielle restringierte FFD-Räume betrachtet.

3.1 FFD-THEORIE

Im Folgenden sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ und - falls nichts anderes vorausgesetzt ist - sei Ω offen. Die folgende Definition 3.1 ist eigentlich nur eine neue Bezeichnung des $C(\Omega, \mathbb{R}^d)$, ist aber, wie wir später sehen werden, sinnvoll, da sie für die restrinierten FFD-Räume eine einfache Schreibweise erlaubt.

Definition 3.1. Eine FFD-Funktion ist eine stetige Funktion $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Die Menge aller FFD-Funktion wird mit $\Psi(\Omega)$ bezeichnet.

Sei u ein geometrisches Objekt in Ω , dann bezeichnet $\psi(u)$ das Anwenden von ψ auf jeden Punkt $p \in u$, also ist das Bild von u unter ψ gegeben durch

$$\psi(u) := \{\psi(x) \mid x \in u\}. \quad (3.1)$$

Es wird aber nicht nur das geometrische Objekt u , sondern der ganze das geometrische Objekt enthaltende Raum Ω abgebildet. Dabei werden alle in dem Raum Ω enthaltenen geometrischen Objekte u in den Raum \mathbb{R}^d abgebildet. Das Bild jedes geometrischen Objektes unter der Deformation ψ ist wieder ein geometrisches Objekt.

Bemerkung 3.1. Es kann sowohl $\psi(\Omega) \subseteq \Omega$ als auch $\Omega \subseteq \psi(\Omega)$ gelten. Für die globale FFD-Optimierung werden meist solche FFD-Funktionen ψ verwendet, für die $\Omega \subseteq \psi(\Omega)$ gilt.

Beispiel 3.1. Wir betrachten ein Bild im \mathbb{R}^2 (siehe Abb. 3.1) und wenden darauf verschiedene FFD-Funktionen an. Die erste Abbildung zeigt den Ausgangszustand, in der zweiten wurde eine FFD-Funktion angewandt, für die $\Omega = \psi(\Omega)$ gilt. In der dritten Abbildung ist das Bild einer FFD-Funktion gegeben, für die $\psi(\Omega) \subseteq \Omega$ gilt.

Bevor weitere Eigenschaften der FFD-Räume angegeben werden, wird noch eine vereinfachende Schreibweise eingeführt. Sei \mathcal{I} die Identität auf Ω , also $\mathcal{I}(x) = x$ für alle $x \in \Omega$, dann kann jede FFD-Funktion ψ als

$$\psi = \mathcal{I} + \Delta\psi \quad (3.2)$$

mit $\Delta\psi := \psi - \mathcal{I}$ geschrieben werden. Dabei kann $\Delta\psi$ als Störung der Identität verstanden werden. Aus dieser Schreibweise wird ersichtlich, dass das transformierte Bild eines geometrischen Objekts sich aus dem ursprünglichen geometrischen Objekt und einer Änderung oder Deformation zusammensetzt.

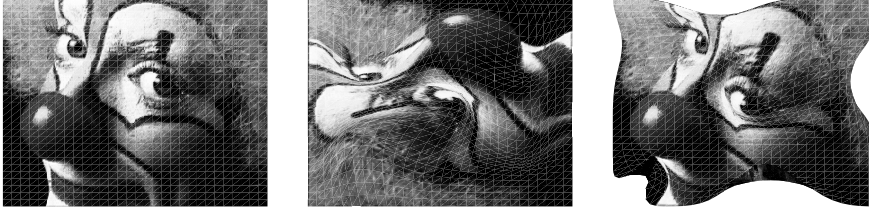


Abbildung 3.1: FFD-Beispiel aus der Bildverarbeitung

Es seien noch zwei Lemmata angeführt welche die Bedeutung von $\Delta\psi$ bei der Deformation von geometrischen Objekten verdeutlichen.

Lemma 3.1. Sei ψ eine FFD-Funktion aus $\Psi(\Omega)$ und $x \in \Omega$, dann gilt

$$\|x - \psi(x)\|_\infty \leq \|\Delta\psi\|_{\infty, \Omega}. \quad (3.3)$$

Beweis. Sei $x \in \Omega$, dann folgt mit $\psi = \mathcal{I} + \Delta\psi$, dass

$$\|x - \psi(x)\|_\infty = \|x - x - \Delta\psi(x)\|_\infty = \|\Delta\psi(x)\|_\infty \leq \|\Delta\psi\|_{\infty, \Omega} \quad (3.4)$$

gilt. \square

Das heißt, die Deformation eines Punktes unter ψ ist durch die Supremumsnorm von $\Delta\psi$ auf Ω beschränkt. Diese Aussage gilt auch für geometrische Objekte.

Lemma 3.2. Sei ψ eine FFD-Funktion aus $\Psi(\Omega)$ und u ein geometrisches Objekt, das in Ω enthalten ist, dann gilt für den Hausdorffabstand D_H von u und seinem Bild unter ψ

$$D_H(u, \psi(u)) \leq \|\Delta\psi\|_{\infty, \Omega}. \quad (3.5)$$

Beweis. Sei $\psi \in \Psi(\Omega)$ und $u \subseteq \Omega$. Der Hausdorffabstand ist per Definition

$$D_H(u, \psi(u)) = \max \left\{ \sup_{x \in u} d(x, \psi(u)), \sup_{\tilde{x} \in \psi(u)} d(u, \tilde{x}) \right\}. \quad (3.6)$$

Betrachten wir als erstes den linken Ausdruck der Klammer und schreiben ψ als Störung der Identität.

$$\sup_{x \in u} d(x, \psi(u)) = \sup_{x \in u} d(x, u + \Delta\psi(u)) \leq \underbrace{\sup_{x \in u} d(x, u)}_{=0} + \sup_{x \in u} d(x, \Delta\psi(u)) \quad (3.7)$$

Für den zweiten Summanden folgt mit Hilfe von Lemma 3.1

$$\sup_{x \in u} d(x, \Delta\psi(u)) = \sup_{x \in u} \inf_{\tilde{x} \in u} d(x, \Delta\psi(\tilde{x})) \leq \|\Delta\psi\|_{\Omega, \infty}. \quad (3.8)$$

Damit insgesamt

$$\sup_{x \in u} d(x, \psi(u)) \leq \|\Delta\psi\|_{\Omega, \infty}. \quad (3.9)$$

Analog lässt sich zeigen, dass

$$\sup_{\tilde{x} \in \psi(u)} d(u, \tilde{x}) \leq \|\Delta\psi\|_{\Omega, \infty} \quad (3.10)$$

ist. Daraus folgt (3.5). \square

Der Abstand des deformierten geometrischen Objekts $\psi(u)$ zu dem geometrischen Objekt ist also durch die Supremumsnorm der Deformation über Ω beschränkt.

Wenden wir uns wieder dem Optimierungsproblem zu:

Definition 3.2. Das FFD-Optimierungsproblem ist gegeben durch

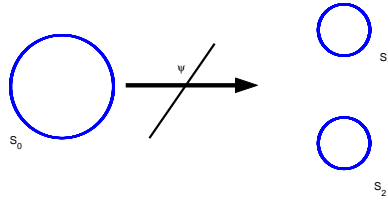
$$FFDO \left\{ \begin{array}{l} \text{Sei } u_0 \in \mathcal{D} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega) \\ f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \\ h: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}, g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}, \\ \mathcal{Z} := \{u \in \mathcal{D} \mid h(u) = 0, g(u) \geq 0\} \\ \text{Gesucht:} \\ \psi^* = \operatorname{argmin} \{f(\psi \circ u_0) \mid \psi \in \Psi(\Omega), \psi(u) \in \mathcal{Z}\}. \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Dabei sei $f, g, h \in C^0(\mathcal{D})$.

Bemerkung 3.2. Die Problemstellung, ein geometrisches Objekt u zu finden, das bezüglich eines Funktionals f optimal ist, wurde umgewandelt. Die neue Problemstellung lautet, den gegebenen Raum Ω , der ein gegebenes geometrisches Objekt u_0 enthält, so zu deformieren, dass das resultierende geometrische Objekt $\psi(u_0)$ optimal bezüglich f ist.

Allerdings sind das NLO-Problem (2.6) und das FFD-Problem (3.2) nicht immer äquivalent, vor allem wenn die Topologie geändert werden kann, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 3.2. Sei $\Omega = (0,1)^2$ und zwei geometrische Objekte in Ω gegeben. Zum einen der Kreis S_0 und zum anderen die Vereinigung $S_V := S_1 \cup S_2$ zweier disjunkter Kreise S_1 und S_2 (siehe Abbildung 3.2). Dann gibt es keine stetige Abbildung $\psi \in C(\Omega, \mathbb{R}^2)$ mit $\psi(S_0) = S_V$ und damit auch keine FFD-Funktion, die die beiden geometrischen Objekte ineinander überführt.



Allerdings kann man FFD-Funktionen angeben, die die beiden Kreise S_1 und S_2 auf den Kreis S_0 abbildet. Diese FFD-Funktionen sind nicht injektiv und damit keine Homöomorphismen.

Bemerkung 3.3. Bei der FFD-Optimierung werden hauptsächlich injektive FFD-Funktionen betrachtet, da diese die topologische Struktur des geometrischen Objekts nicht verändern. Es kommt aber zum Beispiel bei parametrisierten Optimierungsproblemen vor, dass nicht injektive FFD-Funktionen verwendet werden. Bei diesen Problemen folgt aus einer Änderung der Topologie des durch die Parameter gegebenen geometrischen Objekts P nicht, dass das durch $\Gamma(P) = u$ bestimmte geometrische Objekte u ebenfalls seine Topologie ändert.

Beispiel 3.3. Sei das geometrische Objekt $P := \{p_1, \dots, p_N\}$ durch die Menge der Kontrollpunkte p_i einer B-Spline Kurve $u(t) := \sum_{i=1}^N b_i(t)p_i, t \in D$ gegeben. Dann folgt aus einer Deformation ψ von P , mit der zwei Kontrollpunkte p_i und p_{i+1} auf einen Punkt $\tilde{p} = \psi(p_i) = \psi(p_{i+1})$ abgebildet werden, nicht, dass es zwei $t_j, t_{\tilde{j}} \in D, t_j \neq t_{\tilde{j}}$ gibt, für die

$$\sum_{i=1}^N b_i(t_j)\psi(p_i) = \sum_{i=1}^N b_i(t_{\tilde{j}})\psi(p_i)$$

gilt. Die Deformation des geometrischen Objekts u ist also injektiv. Für solche Fälle ist es sinnvoll, FFD-Funktionen zuzulassen, die nicht injektiv sind.

3.1.1 LOKALE FFD

Bei der Definition des FFD-Optimierungsproblems wurden keine weiteren Voraussetzungen an die FFD-Funktionen gestellt, die zur Optimierung verwendet werden dürfen. Aber nicht jede FFD-Funktion $\psi \in \Psi(\Omega)$ ist für eine Lösung des Optimierungsproblems (2.6) geeignet. Damit eine FFD-Funktion als mögliche Lösung in Frage kommt, ist es notwendig, dass sie die Nebenbedingungen erfüllt. Wir wollen uns im Folgenden mit FFD-Funktionen beschäftigen, die für ein geometrisches Objekt $u \in \mathcal{Z}$ eine geeignete Deformation darstellen und sich zur Lösung des Optimierungsproblems eignen. Die Menge dieser in Frage kommenden FFD-Funktionen soll nachstehend definiert werden.

Definition 3.3. Eine FFD-Funktion $\psi \in \Psi(\Omega)$ heißt lokal zulässig bezüglich u und \mathcal{Z} , falls $\psi(u) \in \mathcal{Z}$ gilt. Die Menge der lokal zulässigen FFD-Funktionen wird mit $\Psi_{\mathcal{Z},u}(\Omega)$ bezeichnet.

Dies bedeutet, das Anwenden einer lokal zulässigen FFD-Funktion ψ auf ein zulässiges geometrisches Objekt u stellt sicher, dass das deformierte geometrische Objekt $\tilde{u} := \psi(u)$ wieder ein zulässiges geometrisches Objekt ist. Allerdings ist die Menge der zulässigen FFD-Funktionen nicht nur von \mathcal{Z} und Ω , sondern insbesondere auch von dem betrachteten geometrischen Objekt u abhängig.

Beispiel 3.4. Betrachten wir das einführende Beispiel mit dem Seil und dem Hindernis. Eine lokal zulässige FFD-Funktion ist also eine FFD-Funktion, die zu einer gegebenen Seilkurve s eine deformierte Seilkurve \tilde{s} bestimmt, die nicht durch das Hindernis W geht und ihre End- und Anfangspunkte in P und Q hat. Die FFD-

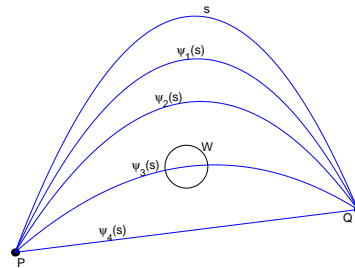


Abbildung 3.2: Beispiel für lokal zulässige FFD-Funktionen

Funktionen ψ_1 , ψ_2 und ψ_4 sind lokal zulässig, während ψ_3 nicht lokal zulässig ist (siehe Abb. 3.2).

Es stellt sich die Frage, unter welchen Voraussetzungen die Existenz einer lokal zulässigen FFD-Funktion, die ein gegebenes zulässiges geometrisches Objekt in ein anderes gegebenes zulässiges geometrisches Objekt abbildet, gesichert ist. Für geometrische Objekte, zwischen denen ein Homöomorphismus existiert, kann der folgende Satz formuliert werden.

Lemma 3.3. *Sei $\Omega = \prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$ abgeschlossen mit $a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \leq b_i$, und $u, u^* \in \mathcal{D}$ und \mathcal{H}_u sei die Homöomorphieklasse von u . Seien weiter sowohl u als auch u^* kompakt und $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}_u$. Dann existiert eine lokal zulässige FFD-Funktion $\psi \in \Psi(\Omega)$ mit $\psi(u) = u^*$.*

Beweis. Da u und u^* in der gleichen Homöomorphieklasse liegen, existiert eine stetige Funktion $f: u \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $f(u) = u^*$. Es bleibt zu zeigen, dass der Homöomorphismus stetig fortgesetzt werden kann. Nach dem Tietzeschen Erweiterungslemma (siehe [Jä80] S. 130) existiert eine stetige Fortsetzung ψ von f auf Ω mit $\psi|_u = u^*$. Damit ist ψ eine zulässige FFD-Funktion bezüglich u . \square

Bemerkung 3.4. *Der Beweis lässt sich auch für $\Omega = \mathbb{R}^d$ formulieren, uns genügt aber diese Form des Lemmas. Das Lemma sagt nur etwas über die Existenz von stetigen FFD-Funktionen aus, und nichts über glattere FFD-Funktionen $\psi \in C^n(\Omega)$ mit $n \geq 1$. Für $n = 1$ wäre es nötig zu fordern, dass die geometrischen Objekte in der gleichen Diffeomorphismenklasse liegen, allerdings ist selbst diese Forderung nicht hinreichend für die Existenz einer stetig differenzierbaren Fortsetzung.*

Damit wurden hinreichende Bedingungen für die Existenz von lokalen FFD-Funktionen zu zwei gegebenen geometrischen Objekten angegeben. Bei den folgenden Optimierungsproblemen sollen nur noch solche Mengen von geometrischen Objekten betrachtet werden, die sich unter FFD-Funktionen ineinander überführen lassen. Aus diesem Grund werden in den folgenden Algorithmen geometrische Objekte aus der Homöomorphismusklasse \mathcal{H}_u des geometrischen Startobjekts u_0 betrachtet. Damit lässt sich das lokale FFD-Optimierungsproblem (IFFDO) wie folgt definieren.

Definition 3.4. Das lokale FFD-Optimierungsproblem ist gegeben durch

$$\text{IFFDO} \left\{ \begin{array}{l} \text{Sei } u_0 \in \mathcal{D} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega) \\ f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \\ h: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}, g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}, \\ \mathcal{Z} := \{u \in \mathcal{D} \mid h(u) = 0, g(u) \geq 0, u \in \mathcal{H}(u_0)\} \\ \text{Gesucht:} \\ \psi^* = \operatorname{argmin}\{f(\psi \circ u_0) \mid \psi \in \Psi_{\mathcal{Z},u}(\Omega)\}. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Dabei sei $f, g, h \in C^0(\mathcal{D})$.

Mit Lemma 3.3 können wir die Lösbarkeit des lokalen FFD-Optimierungsproblems 3.4 auf die Lösbarkeit des nichtlinearen Optimierungsproblems 2.6 zurückführen.

Theorem 3.1. Sei $\Omega = \Pi_{i=1}^d [a_i, b_i]$ abgeschlossen mit $a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \leq b_i$. Weiter sei $f, g, h \in C^0(\mathcal{D})$, u eine kompakte zulässige Startgeometrie und $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{H}_u$. Das lokale FFD-Optimierungsproblem (3.4) ist genau dann lösbar, wenn das nichtlineare Optimierungsproblem (2.6) lösbar ist. Für die Lösungen gilt

$$f(\psi^*(u)) = f(u^*). \quad (3.13)$$

Beweis. Sei u^* eine Lösung von NLO, dann gibt es nach Lemma 3.3 eine zulässige FFD-Funktion ψ mit $\psi(u) = u^*$. Sei umgekehrt $\psi^*(u)$ eine Lösung des IFFDO, dann ist $u^* := \psi^*(u)$ zulässig für das NLO und damit eine Lösung. \square

3.1.2 GLOBALE FFD

Bis jetzt wurden Mengen von lokalen FFD-Funktionen $\Psi_{\mathcal{Z},u}$ abhängig von dem gegebenen geometrischen Objekt u und von der Menge der zulässigen geometrischen Objekte \mathcal{Z} betrachtet. Nachstehend sollen Mengen von FFD-Funktionen behandelt werden, die nicht von einem gegebenen geometrischen Objekt u , sondern nur von der Menge der zulässigen geometrischen Objekte \mathcal{Z} abhängig sind. Das führt zu der folgenden Definition.

Definition 3.5. Eine FFD-Funktion ψ heißt global zulässig bezüglich \mathcal{Z} , falls $\psi(u) \in \mathcal{Z}$ für alle $u \in \mathcal{Z}$ gilt. Die Menge aller global zulässigen FFD-Funktionen $\Psi_{\mathcal{Z}}(\Omega)$ ist gegeben durch

$$\Psi_{\mathcal{Z}}(\Omega) := \bigcap_{u \in \mathcal{Z}} \Psi_{\mathcal{Z},u}(\Omega) \quad (3.14)$$

(siehe Abbildung 3.3).

Für einen nicht restringierten Lösungsraum, also $\mathcal{Z} = \mathfrak{P}(\Omega)$, folgt somit $\Psi_{\mathcal{Z}}(\Omega) = \Psi_{\mathcal{Z},u}(\Omega)$ für alle $u \in \mathcal{Z}$. Man erhält FFD-Funktionen ψ , die auf jedes

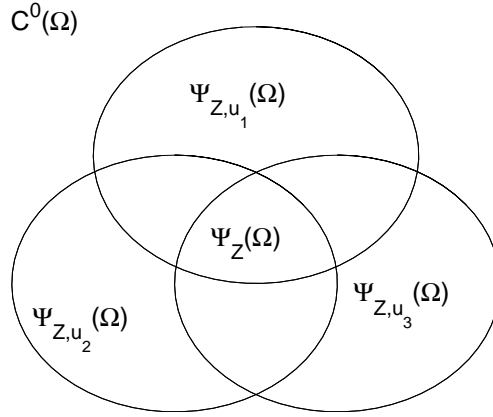


Abbildung 3.3: Übersicht über FFD-Funktionen

zulässige geometrische Objekt $u \in \mathcal{Z}$ angewendet werden können und die zulässige geometrische Objekte $\psi(u)$ erzeugen. Allerdings wird damit die Menge der FFD-Funktionen stark eingeschränkt, denn aus $\mathcal{Z} \subsetneq \mathfrak{P}(\Omega)$, $\mathcal{Z}/u \neq \emptyset$ folgt, dass ein $u \in \mathcal{Z}$ existiert, so dass $\Psi_{\mathcal{Z}} \subsetneq \Psi_{\mathcal{Z},u}$ gilt. Im ungünstigsten Fall ist der Zulässigkeitsbereich \mathcal{Z} so gegeben, dass die Menge der global zulässigen FFD-Funktionen nur aus der Identität besteht, während die Menge der lokal zulässigen FFD-Funktionen, unabhängig von dem gewählten geometrischen Objekt, mehr Elemente enthält. Die Identität \mathcal{I} ist allerdings immer in $\Psi_{\mathcal{Z}}(\Omega)$ enthalten.

Wir wollen nun das nichtlineare Optimierungsproblem (2.6) mit Hilfe der global zulässigen FFD-Funktionen neu formulieren.

Definition 3.6. Das globale FFD-Optimierungsproblem ist gegeben durch

$$FFDO \left\{ \begin{array}{l} \text{Sei } u \in \mathcal{Z}, \\ f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \\ h: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}, g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}, \\ \mathcal{Z} := \{u \in \mathcal{D} \mid h(u) = 0, g(u) \geq 0, u \in \mathcal{H}_u\} \\ \text{Gesucht:} \\ \psi^* = \operatorname{argmin}\{f(\psi \circ u) \mid \psi \in \Psi_{\mathcal{Z}}(\Omega)\}. \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Dabei sei $f, g, h \in C^0(\mathcal{D})$.

Wie im vorigen Kapitel gezeigt wurde, stimmen die Lösungen des lokalen FFD-Optimierungsproblem 3.4 mit den Lösungen des nichtlinearen Optimierungsproblems 2.6 immer überein, falls $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}_u$ gilt. Es stellt sich die Frage, ob es möglich ist, Voraussetzungen anzugeben, so dass zu jeder lokal zulässigen FFD-Funktion $\psi \in \Psi_{\mathcal{Z},u}$ eine global zulässige FFD-Funktion $\tilde{\psi} \in \Psi_{\mathcal{Z}}$ existiert, für die $\tilde{\psi}|_u = \psi$ gilt. Die Voraussetzung $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}_u$ genügt nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

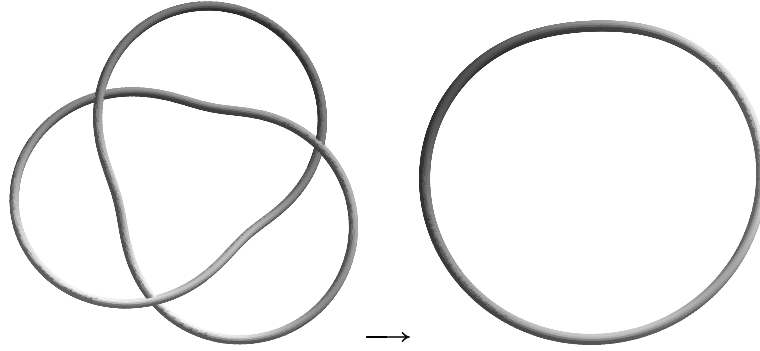


Abbildung 3.4: Gegenbeispiel: Torusknoten

Beispiel 3.5. Sei \mathcal{Z} die Menge aller doppeltpunktfreien geschlossenen Kurven c_i mit $c_i: [0, 1] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^3$. Sei weiter c_1 ein Torusknoten und c_K ein Kreis (siehe Abbildung 3.4). Dann gibt es einen Homöomorphismus $\chi: c_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\chi(c_1) = c_K$. Es gibt aber keine Fortsetzung $\tilde{\chi}$ von χ auf ganz Ω mit $\tilde{\chi}|_{c_1} = c_K$, da die Komplemente von c_1 und c_K nicht homöomorph sind (siehe Lemma 3.4).

Optimierungsprobleme, die sich mit lokalen FFD-Funktionen lösen lassen, müssen nicht mit globalen FFD-Funktionen lösbar sein.

Bemerkung 3.5. Aus den genannten Gründen scheint es zunächst nicht sinnvoll zu sein, sich mit global zulässigen FFD-Funktionen zu beschäftigen. Die lokal zulässigen FFD-Funktionen scheinen besser zur Lösung des Optimierungsproblems (2.6) geeignet zu sein. Trotzdem werden in der FFD-Optimierung hauptsächlich global zulässige FFD-Funktionen verwendet, da sie zu effizienteren Algorithmen führen.

Für die Äquivalenz des lokalen FFD-Optimierungsproblems mit dem NLO-Optimierungsproblem genügt es, $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{H}$ zu verlangen. Bei dem globalen FFD-Optimierungsproblem benötigt man jedoch mehr Voraussetzungen. Eine weitere notwendige Bedingung ist, dass die Komplemente aller $u \in \mathcal{Z}$ ebenfalls in einer Homöomorphieklasse liegen.

Lemma 3.4. *Seien $u_1, u_2 \subseteq \mathbb{R}^d, u_1, u_2 \in \mathcal{H}_u$ zwei kompakte Teilmengen der Dimension d . Weiter sei $\chi: u_1 \rightarrow u_2$ ein Homöomorphismus und $\mathbb{R}^d/u_1 \not\cong \mathbb{R}^d/u_2$. Dann gibt es keine stetige Abbildung $\tilde{\chi}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $\tilde{\chi}(u_1) = u_2$, die jedes Element aus \mathcal{H}_u homöomorph abbildet.*

Beweis. Sei $\tilde{\chi}$ eine solche Abbildung und $\mathbb{R}^d/u_1 \not\cong \mathbb{R}^d/u_2$. Dann bildet $\tilde{\chi}$ jeden d -dimensionalen Ball $B \subset \mathbb{R}^d$ homöomorph ab. Weil u_1 kompakt ist, gibt es einen d -dimensionalen Ball $B \subset \mathbb{R}^d$ mit $u_1 \subset B$. Dann ist $\tilde{\chi}|_B: B \rightarrow \tilde{\chi}(B)$ ein Homöomorphismus und nach Voraussetzung gilt $F(u_1) = u_2$. Also ist $B/u_1 \approx B/u_2$ und da sich jeder Homöomorphismus von einem Ball auf den ganzen \mathbb{R}^d fortsetzen lässt, folgt $\mathbb{R}^d/u_1 \approx \mathbb{R}^d/u_2$. Dies ist ein Widerspruch zu den Voraussetzungen. \square

3.1.3 INJEKTIVE FFD

In vielen Fällen in der geometrischen Optimierung ist die topologische Struktur des geometrischen Objekts fest vorgeschrieben und soll während der Optimierung nicht verändert werden (siehe Beispiel 2.2). Es sind also solche FFD-Funktionen von Interesse, die ein gegebenes geometrisches Objekt homöomorph abbilden. Dafür ist es notwendig injektive FFD-Funktionen zu betrachten.

Lemma 3.5. *Sei $\psi \in \Psi_{\mathcal{Z}}$ eine stetig differenzierbare zulässige FFD-Funktion und die Norm der Inversen der Jacobimatrix $J_{\psi}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ sei beschränkt, dann ist ψ ein Homöomorphismus auf \mathbb{R}^d .*

Beweis. Der Beweis folgt direkt aus [CH96] (S. 29 unten). \square

Zum Einhalten der Voraussetzungen wäre es nötig, die Jacobimatrix auf ganz \mathbb{R}^d abzuschätzen. Um dies zu umgehen, wird der Rand $\partial\Omega$ von Ω aber auf sich selbst abgebildet, das heißt, auf $\partial\Omega$ gilt $\psi = \mathcal{I}$. Fordert man noch zusätzlich, dass ψ stetig differenzierbar durch die Identität auf \mathbb{R}^d/Ω fortgesetzt werden kann, so genügt es, die Jacobimatrix auf Ω zu betrachten, da sie außerhalb von Ω gleich der Einheitsmatrix ist. Diese Überlegung führt zu dem folgenden Satz.

Lemma 3.6. Sei $\psi \in \Psi_{\mathcal{Z}}$ eine zulässige stetig differenzierbare FFD-Funktion mit $\psi(x) = x$ für $x \in \mathbb{R}^d / \Omega$ und die Norm der Inversen der Jacobimatrix $J_{\psi}(x)$ für alle $x \in \Omega$ sei beschränkt, dann ist ψ ein Homöomorphismus auf Ω .

Beweis. Auf Ω gilt für die Inverse der Jacobimatrix nach Voraussetzung, dass sie beschränkt ist. Außerhalb von Ω gilt $\psi(x) = x$ und damit ist die Inverse der Jacobimatrix die Einheitsmatrix und somit ebenfalls beschränkt. Damit kann man Lemma 3.5 anwenden. \square

Falls $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{H}_u$ gilt, so ist es notwendig, dass ψ injektiv auf u ist, um eine homöomorphe Funktion für u zu erhalten. Es ist nicht notwendig, dass ψ injektiv auf ganz Ω ist. In Beispiel 3.14 werden global zulässige FFD-Funktionen verwendet, die auf s injektiv und auf Ω nicht injektiv sind. Die in Beispiel 7.1 verwendeten FFD-Funktionen sind auf ganz Ω injektiv. Für geometrische Objekte, die nur aus wenigen Punkten bestehen, genügt es, die Injektivität von ψ nur für jeden Punkt von u zu überprüfen um einen Homöomorphismus zu erhalten.

In den Anwendungen kann die lokale Injektivität von FFD-Funktionen einfach hergestellt werden. Die globale Injektivität ist schwerer zu bekommen. Aus diesem Grund betrachtet man lokal injektive Funktionen und modifiziert sie so, dass sie global injektiv sind.

In Lemma 3.6 wurde der Rand von Ω und das Komplement von Ω fixiert, um injektive Funktionen zu erhalten. Wenn die Funktionen ψ auf Ω lokal injektiv sind, so lässt sich die Injektivität von ψ auf Ω durch eine Fixierung des Randes erreichen. Im Gegensatz zu Lemma 3.6 ist es nicht notwendig, sich mit dem Verhalten von ψ auf \mathbb{R}^d / Ω zu befassen.

Lemma 3.7. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ homöomorph zur Einheitssphäre im \mathbb{R}^d . Weiter sei $\psi \in \Psi_{\mathcal{Z}}$ eine zulässige stetig differenzierbare FFD-Funktion mit $\psi(x) = x$ für $x \in \partial\Omega$ und ψ sei lokal injektiv auf Ω . Dann ist ψ injektiv auf Ω und damit ein Homöomorphismus auf Ω .

Beweis. Als erstes zeigen wir, dass kein Punkt aus dem Inneren von Ω auf den Rand von Ω abgebildet werden kann. Weil ψ stetig differenzierbar und lokal injektiv auf Ω ist, existiert nach dem Satz über implizite Funktionen in jedem inneren Punkt von Ω eine stetige Umkehrabbildung ψ^{-1} . Da ψ^{-1} stetig ist, sind die Urbilder offener Mengen offen, also gibt es keinen Punkt im inneren von Ω der auf den Rand abgebildet wird, da die Umkehrabbildung nicht stetig wäre.

Es bleibt noch zu zeigen, dass ψ injektiv auf Ω ist. Sei $\tilde{x} \in \Omega$ ein Bildpunkt, dann gibt es nur endlich viele Urbilder von \tilde{x} . Denn falls unendlich viele Urbilder von \tilde{x} existieren, so gibt es einen Häufungspunkt in Ω und damit wäre ψ in diesem Punkt nicht lokal injektiv. Es bleibt zu zeigen, dass jeder Bildpunkt nur ein Urbild hat, dafür verwenden wir den Brouwerschen Abbildungsgrad d (siehe [Sau00], S. 177 ff), und die zugehörige Summenformel. Weiter definieren wir die Abbildung $f(x) := \psi(x) - x^*$. Nach der Vorüberlegung existieren nur endlich viele Lösungen $x^{(1)}, \dots, x^{(p)}$ der Gleichung $f(x) = 0$. Da f stetig und lokal injektiv ist, ist der Index der Abbildung gegeben durch

$$i(f, x^{(j)}) := \operatorname{sgn} J_\psi(x^{(j)}) \in \{-1, 1\} \quad (3.16)$$

mit wobei $x^{(j)}$ eine der endlich vielen Lösungen von $f(x) = 0$ ist. Da nur endlich viele Lösungen existieren, ist der Abbildungsgrad gegeben durch

$$d(f, \Omega) = \sum_{j=1}^p i(f, x^{(j)}). \quad (3.17)$$

Da Ω wegzusammenhängend ist, ist $\operatorname{sgn} J_\psi(x)$ konstant 1 oder -1. Also erhält man

$$d(f, \Omega) = p.. \quad (3.18)$$

Nach dem Satz von Jordan-Brower gilt, da Ω homöomorph zur Einheitssphäre im \mathbb{R}^d ist, dass der Abbildungsgrad von f bezüglich aller $x \in \Omega$ durch

$$d(f, \Omega) = \pm 1 \quad (3.19)$$

gegeben ist. Aus Gleichung (3.18) und (3.19) folgt, dass $p = 1$ ist und somit jeder Bildpunkt nur einen Urbildpunkt hat, demzufolge ist ψ injektiv auf Ω . \square

Im Folgenden wird noch eine weitere Methode angegeben, wie eine Funktion auf globale Injektivität auf Ω überprüft werden kann. Dazu ist es notwendig wie in ([Rei97]) beschrieben, die Eigenwerte einer symmetrisierten Jacobimatrix zu betrachten. Zuerst definiert man

$$\tilde{J}_\psi := (J_\psi + J_\psi^T)/2 \quad (3.20)$$

als symmetrisierte Jacobimatrix von ψ . Dann erhält man das folgende Lemma.

Lemma 3.8. Sei \tilde{J}_ψ positiv definit für alle $x \in \Omega$, Ω konvex, dann ist ψ global injektiv auf Ω .

Beweis. Beweis durch Gegenannahme: Sei $\tilde{J}_\psi(x)$ positiv definit, man betrachtet zwei Punkte $x_1, x_2 \in \Omega, x_1 \neq x_2$, in einer kleinen Umgebung von x für die $\psi(x_1) = \psi(x_2)$ gilt. Dann kann man, da Ω konvex ist, eine Kurve

$$s(t) := r^T \psi(x_1 + tr), \quad t \in [0, 1] \quad (3.21)$$

mit $r := x_2 - x_1$ definieren und $s(t) \in \Omega$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann ist s so definiert, dass $s(0) = s(1)$ gilt. Nach dem Mittelwertsatz gibt es nun ein $\tau \in (0, 1)$ mit

$$s'(\tau) = rJ(x_1 + \tau r)r^T = 0. \quad (3.22)$$

Da aber nach Voraussetzung $r\tilde{J}_\psi r^T > 0$ für alle $r \neq 0$ (positive Definitheit) gilt und damit auch $rJ_\psi r^T > 0$, so folgt, dass $r = 0$ gilt, was ein Widerspruch zu der Annahme $x_1 \neq x_2$ ist. \square

Bemerkung 3.6. In der Praxis lässt sich die Bedingung, dass \tilde{J}_ψ positiv definit ist, einfach durch Berechnung der Eigenwerte von $\tilde{J}_\psi(x)$, für jedes $x \in u$, verifizieren. Da \tilde{J}_ψ im Allgemeinen nicht sehr groß ist, ist dies ein numerisch sicheres und schnelles Verfahren, um Deformationen des betrachteten geometrischen Objekts u , die nicht injektiv sind, auszuschließen.

3.1.4 HOMOTOPE FFD

Als letztes werden FFD-Funktionen betrachtet, die in der Computergrafik als Morphing bezeichnet werden. Diese Funktionen werden als homotope FFD-Funktionen bezeichnet.

Definition 3.7. Eine FFD-Funktion ψ heißt homotop zulässig bezüglich eines zulässigen geometrischen Objekts $u \in \mathcal{Z}$, falls eine stetige Funktion

$$H: [0, 1] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$$

existiert mit $H(0, u) = u$ und $H(1, u) = \psi \circ u$ und $H(t, u) \in \mathcal{Z}$ für alle $t \in [0, 1]$ gilt. Die Menge aller zulässigen homotopen FFD-Funktionen wird mit $\Psi_{\mathcal{Z}, H}$ bezeichnet (siehe Abbildung 3.5).

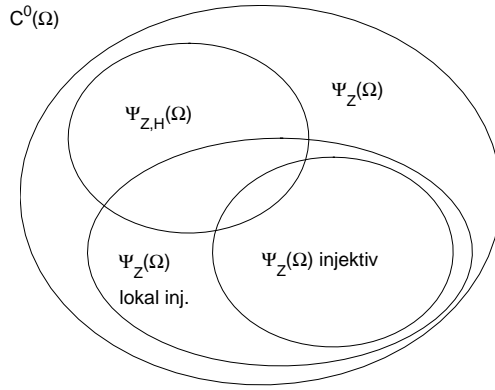


Abbildung 3.5: Übersicht über homotope und injektive FFD-Funktionen

Bemerkung 3.7. Wir beschränken uns hier auf global zulässige FFD-Funktionen, da in der weiteren Theorie hauptsächlich solche betrachtet werden.

Die Verwendung von homotopen FFD-Funktionen schränkt die Menge der zur Lösung des Optimierungsproblems zulässigen Funktionen weiter ein. So gilt Lemma 3.3 nur noch, falls u und u^* homotop sind.

Bemerkung 3.8. Allerdings lassen sich mit der Homotopiebedingung einige bestimmte Restriktionen einfacher fassen (siehe Kapitel 4). So ist es in Beispiel 3.6 durchaus sinnvoll zu verlangen, dass das Seil oberhalb des Hindernisses bleibt. Dies ist gleichbedeutend mit der Forderung, dass die Menge der FFD-Funktionen, die zulässige Lösungen darstellen, homotop sein sollen, unter der Bedingung, dass die Startkurve oberhalb des Hindernisses verläuft. In vielen Anwendungen, gerade im Maschinen- und Fahrzeugbau, begrenzen solche Hindernisse die Ausdehnung von geometrischen Objekten und werden als nicht durchdringbar angesehen.

Homotope FFD-Funktionen sind also in vielen Fällen von besonderem Interesse. Es stellt sich die Frage, ob die Homotopie von zwei geometrischen Objekten die Existenz einer homotopen FFD-Funktion auf dem die beiden Objekte umgebenden Raum sichert. Seien $u, \tilde{u} \in \Omega$ zwei geometrische Objekte mit einer Homotopiefunktion

$$G: [0, 1] \times u \rightarrow \Omega.$$

Um eine homotope FFD-Funktion zu erhalten, ist es notwendig, eine Homotopiefunktion $H: [0, 1] \times \Omega \rightarrow \Omega$ zu bestimmen mit $H|_u = G$. Dies ist aber im

Allgemeinen nicht möglich.

Um die Fortsetzung der Homotopie zu realisieren, werden spezielle geometrische Objekte u , die kompakt sind und einen CW-Unterkomplex bezüglich Ω bilden, betrachtet. (Wir gehen hier nicht näher auf CW-Unterkomplexe ein, sondern verweisen auf [Hu64] und [Jä80].) Solche Objekte sind zum Beispiel Flächen und Kurven im \mathbb{R}^3 . Dann ist es möglich, eine Homotopie G zwischen zwei solchen geometrischen Objekten u und \tilde{u} zu einer Homotopiefunktion H auf ganz Ω stetig fortzusetzen (siehe [Hu64], S. 147). Allerdings ist die Forderung $H|_u = G$ stärker als notwendig. Vielmehr genügt eine Homotopierelation \tilde{H} mit $\tilde{H}(0, u) = u$ und $\tilde{H}(1, u) = \tilde{u}$. Es ist nicht notwendig, $H(\cdot, u) = \tilde{H}(\cdot, u)$ zu fordern.

Zum Abschluss wird noch ein Beispiel für homotope FFD-Funktionen angegeben.

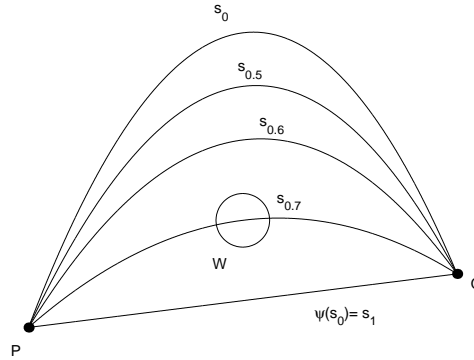


Abbildung 3.6: Seil s zwischen P und Q um das Hindernis W

Beispiel 3.6. Wir betrachten erneut das Seil-Beispiel 2.1. Das Hindernis W sei gegeben durch $w = (0.5, 0.4)$ mit Radius $r = 0.05$. Weiterhin sei \mathcal{Z} wie in 2.1. Dann erhalten wir mit

$$\psi(x) := \begin{pmatrix} 8(x_2 - 0.2) + 0.1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

eine lokal zulässige FFD-Funktion, die s_0 nach s_1 abbildet (siehe Abbildung 3.6). Allerdings ist ψ nicht lokal homotop, da keine Homotopiefunktion H existiert, die

für jedes t eine zulässige FFD-Funktion ist. Sei zum Beispiel

$$H(x, t) := t\psi(x) \text{ mit } t \in [0, 1] \text{ und } x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2,$$

dann erhält man für $s_t(x) = H(x, t)$ die in Abbildung 3.6 angegebenen Kurven. In diesem Beispiel ist $s_{0.7}$ nicht zulässig und damit ist diese FFD-Funktion H keine homotop zulässige FFD-Funktion für $t = 0.7$.

3.2 FINITE FFD-RÄUME

In Kapitel 3.1.1 wurde gezeigt, dass unter gewissen Voraussetzungen die Lösung von nichtlinearen geometrischen Optimierungsproblemen sich auf das Bestimmen von FFD-Funktionen zurückführen lässt. Allerdings waren die betrachteten FFD-Räume nicht endlich dimensional und so lässt sich in den meisten Fällen die gesuchte FFD-Funktion numerisch nicht oder nur schwer bestimmen. Ziel dieses Kapitels ist es, durch eine Diskretisierung eines FFD-Raums einen endlich dimensionalen FFD-Unterraum $\Phi(\Omega) \subseteq \Psi(\Omega)$ zu bestimmen und somit das unendlich-dimensionale Problem durch ein endlich-dimensionales Problem zu approximieren.

Um die ersten Schritte zu vereinfachen, wird zuerst der nichtrestringierte Fall, also $m_1 = 0$ und $m_2 = 0$, betrachtet. Als erster Schritt wird der FFD-Raum diskretisiert. Dazu wird eine endliche Anzahl von linear unabhängigen stetigen FFD-Funktionen $[b_1, \dots, b_n]$ mit

$$b_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \tag{3.23}$$

gewählt. Diese Funktionen bilden die Basis B^n des finiten FFD-Raums. Weiter sei

$$A := [a_1, \dots, a_n], a_i \in \mathbb{R} \tag{3.24}$$

ein Vektor von *Freiheitsgraden*.

Definition 3.8. Sei $A \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor von Freiheitsgraden und B^n eine endlich-dimensionale stetige Basis. Dann ist eine finite FFD-Funktion φ_A gegeben durch

$$\varphi_A(x) := x + \sum_{i=1}^n b_i(x) a_i. \tag{3.25}$$

Der Raum der finiten FFD-Funktionen zur Basis B^n wird mit $\Phi_B(\Omega)$ bezeichnet.

Es gilt $\Phi_B(\Omega) \subseteq \Psi(\Omega)$ und der Raum der finiten FFD-Funktionen ist ein Vektorraum bezüglich der Freiheitsgrade.

Im Folgenden soll untersucht werden, wie die lokale, globale und homotope Zulässigkeit sich auf die finiten FFD-Funktionen auswirkt. Für das nicht restringierte Problem sind alle lokal zulässigen FFD-Funktionen auch global zulässig. Desweiteren sind global zulässige FFD-Funktionen auch homotop zulässig.

Für den restringierten Fall muss die Menge der Freiheitsgrade \mathcal{A} etwas genauer angeschaut werden. Dafür betrachten wir einen Raum von finiten FFD-Funktionen der nicht zulässige FFD-Funktionen enthält. Sei also \mathcal{Z} die Menge der zulässigen geometrischen Objekte und die Menge der lokal zulässigen FFD-Funktionen sei durch $\Psi_{\mathcal{Z},u}(\Omega)$ gegeben. Sei weiter $\Phi_B(\Omega)/\Psi_{\mathcal{Z},u}(\Omega) \neq \emptyset$, das heißt im Raum der finiten FFD-Funktionen sind nicht zulässige FFD-Funktionen enthalten.

Da aber nur die zulässigen FFD-Funktionen zur Optimierung geeignet sind, gilt es, die Zulässigkeit der verwendeten finiten FFD-Funktionen, sicher zu stellen. Um zu garantieren, dass die betrachteten finiten FFD-Funktionen zulässig sind, wird der Begriff der zulässigen Freiheitsgrade eingeführt.

Definition 3.9. Sei $\Phi_B(\Omega)$ ein n -dimensionaler Untervektorraum von $\Psi(\Omega)$ mit den Freiheitsgraden $A \in \mathbb{R}^n$, $u \in \Omega$ ein geometrisches Objekt und \mathcal{Z} die Menge der zulässigen geometrischen Objekte.

- Die Menge $\mathcal{A}(u) \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt lokal zulässige Menge von Freiheitsgraden, falls für jedes $A \in \mathcal{A}(u)$ die finite FFD-Funktion $\varphi_A \in \Psi_{\mathcal{Z},u}$ eine lokal zulässige-FFD Funktion ist.
- Die Menge $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt global zulässige Menge von Freiheitsgraden, falls für jedes $A \in \mathcal{A}$ die finite FFD-Funktion $\varphi_A \in \Psi_{\mathcal{Z}}$ eine global zulässige-FFD Funktion ist.

Eine homotop zulässige FFD-Funktion ist für jedes $A \in \tilde{\mathcal{A}}$ gegeben, falls $\tilde{\mathcal{A}}$ wegzusammenhängend ist und $A_{\mathcal{T}} := [0, \dots, 0] \in \tilde{\mathcal{A}}$ gilt.

Definition 3.10. Die Menge der finiten zulässigen FFD-Funktionen ist gegeben durch

$$\mathcal{M}(B, \mathcal{A}) := \{\varphi_A \in \Phi_B(\Omega) \mid A \in \mathcal{A}\}. \quad (3.26)$$

Eine Menge von FFD-Funktionen ist also durch eine Basis und eine Menge zulässiger Vektoren gegeben. Somit existieren drei Möglichkeiten, die Zulässigkeit dieser Menge zu erreichen. Zum einen die Wahl einer geeigneten Basis bzw. die Einschränkung der zulässigen Freiheitsgrade oder aber eine Kombination beider Möglichkeiten.

Bemerkung 3.9. *Die Zulässigkeit von finiten FFD-Funktionen über die Menge der zulässigen Freiheitsgrade zu kontrollieren, ist für komplexes \mathcal{Z} nicht einfach. Im Allgemeinen kann man davon ausgehen, dass, falls \mathcal{Z} eine komplizierte Struktur hat, \mathcal{A} ebenfalls eine komplizierte Struktur hat. Dies erleichtert nicht das Optimierungsproblem und ist aus diesem Grund kein sinnvoller Ansatz. Hinzu kommt, dass es für homotope FFD-Funktionen notwendig ist, \mathcal{A} auf Zusammenhangskomponenten zu überprüfen. In Kapitel 4 werden wir eine Methode angeben, die es ermöglicht, die Struktur von \mathcal{A} stark zu vereinfachen und im besten Fall zu $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$ führt. Der Begriff der zulässigen Freiheitsgrade wird im Weiteren verwendet werden und wurde aus diesem Grund hier angegeben.*

Bevor wir uns weiter mit den finiten FFD-Räumen befassen, geben wir einige Beispiele von möglichen Basisfunktionen an.

Beispiel 3.7. *Als erstes betrachten wir die Monombasis des Polynomraums der Ordnung n für $\Omega \subseteq \mathbb{R}$. Die Polynombasis ist gegeben durch*

$$b_i(x) := x^i \quad (3.27)$$

mit $0 \leq i \leq n-1$ und $x \in \Omega$. Für die Menge der zulässigen Freiheitsgrade \mathcal{A} im nicht restringierten Fall gilt $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$.

Während FFD-Transformationen für $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ nur selten verwendet werden, sind solche für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ oder $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ der Normalfall. Aus diesem Grund wird noch ein Beispiel für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ angegeben.

Beispiel 3.8. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, dann sind weitere mögliche Basen gegeben durch,*

$$(b_1, \dots, b_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

$$(b_1, \dots, b_6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y & 0 & x \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

$$(b_1, \dots, b_4) = \begin{pmatrix} 0 & y & xy & x \\ y & xy & x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Das FFD-Optimierungsproblem (3.4) mit finiten FFD-Funktionen führt zu dem finiten FFD-Optimierungsproblem.

Definition 3.11. Sei $\Phi_B(\Omega)$ ein finiter FFD-Raum der Dimension n , dann ist das finite FFD-Optimierungsproblem gegeben durch

$$\text{FFFO} \left\{ \begin{array}{l} \text{Sei } \mathcal{D} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega) \\ f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \\ h: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}, g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}, \\ \mathcal{Z} := \{u \in \mathcal{D} \mid h(u) = 0, g(u) \geq 0\} \\ \text{Gesucht:} \\ A^* = \operatorname{argmin}\{f(\varphi_A(u)) \mid A \in \mathcal{A}(u)\}. \end{array} \right. \quad (3.31)$$

Dabei sei $f, g, h \in C^0(\mathcal{D})$.

Die Struktur der Menge \mathcal{A} kann aufgrund der Nebenbedingungen g und h sehr komplex werden. Falls dies der Fall ist, so bleibt das Problem der nichtlinearen geometrischen Optimierung weiterhin schwer lösbar. In Kapitel 4 wird gezeigt, wie verschiedene komplexe Strukturen vereinfacht und in einigen Spezialfällen ein konvexes \mathcal{A} erreicht werden kann. Zuvor werden zwei Polynombasen detailliert betrachtet und anhand der durch sie erzeugten Mengen von finiten FFD-Funktionen eine Bewertung jener Basen angegeben. Zur Klassifizierung der verschiedenen Mengen von finiten FFD-Funktionen wird der Begriff der Flexibilität verwendet, der im nächsten Unterkapitel erklärt wird.

3.2.1 FLEXIBILITÄT VON FFD-RÄUMEN

Im Folgenden soll der Begriff der Flexibilität von Mengen von finiten FFD-Funktionen eingeführt werden. Dieser Begriff ermöglicht eine Klassifizierung der verschiedenen Mengen. Die Flexibilität einer Menge von finiten FFD-Funktionen ist immer als relativ zu der Menge der zulässigen FFD-Funktionen zu verstehen. Dabei wird die Menge der (global bzw. lokal) zulässigen FFD-Funktionen mit der Menge der lokal bzw. global zulässigen finiten FFD-Funktionen zu einer gegebenen Basis B verglichen. Bevor die Flexibilität definiert wird, werden die 0- und 1-Flexibilität kurz anschaulich erklärt.

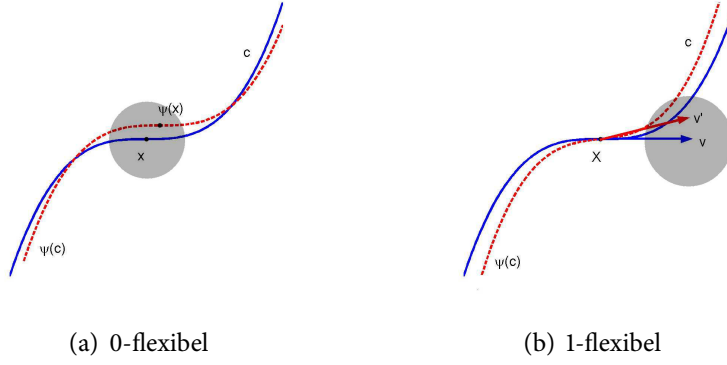


Abbildung 3.7: 0- und 1-Flexibilität

Dafür betrachtet man einen Punkt $x \in \Omega$ und eine beliebige regulär parametrisierte stetige Kurve $c: [a, b] \rightarrow \Omega$, die durch den Punkt $x = c(t_0)$, $t_0 \in (a, b)$ geht. Für die ersten Beispiele sei $\mathcal{Z} = \mathfrak{P}(\Omega)$, und die Menge der finiten FFD-Funktionen \mathcal{M} sei gegeben durch $\mathcal{M}(B, \mathbb{R}^d) := \Phi_B(\Omega)$. Sei weiter $x \in \Omega$ ein Punkt, in dem die Flexibilität der Menge \mathcal{M} betrachtet werden soll. Dafür bestimmt man die Menge der Bilder von x unter allen finiten FFD-Funktionen $\varphi_A \in \mathcal{M}(B, \mathcal{A})$. Offensichtlich kann x auf jeden anderen Punkt $x' \in \Omega$ abgebildet werden. Dies gilt aber nur für den nichtrestringierten Fall. Diese Eigenschaft soll als 0-flexibel bezeichnet werden, genauer gilt (siehe Abbildung 3.7(a)):

Sei $\mathcal{Z} = \mathfrak{P}(\Omega)$. Eine 0-flexible Menge von FFD-Funktionen im Punkt x ist durch eine Menge von finiten FFD-Funktionen $\mathcal{M}(B, \mathcal{A})$ gegeben, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass zu jedem $x' \in B_\epsilon(x)$ ein $\varphi_A \in \mathcal{M}(B, \mathcal{A})$ existiert mit $\varphi_A(x) = x'$.

Im restringierten Fall kann die Menge der Bildpunkte eingeschränkt werden. Deswegen wird im restringierten Fall nicht die gesamte Umgebung von x betrachtet, sondern nur die Bilder von x , die mit zulässigen FFD-Funktionen $\psi \in \Psi_{\mathcal{Z}}$ erreicht werden können. Wenn ein Punkt fixiert ist, also $\psi(x) = x$ für alle $\psi \in \Psi_{\mathcal{Z}}$ gilt, so ist die Menge $\mathcal{M}(B, \mathcal{A})$ in diesem Punkt 0-flexibel, sobald sie die Identität enthält. Für einen fixierten Punkt gilt:

Eine 0-flexible Menge von FFD-Funktionen ist durch eine Menge von finiten FFD-Funktionen $\mathcal{M}(B, \mathcal{A})$ gegeben, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass zu

jedem $\psi(x) \in B_\epsilon(x)$, $\psi \in \Psi_{\mathcal{Z}}$ ein $\varphi_A \in \mathcal{M}(B, \mathcal{A})$ existiert mit $\varphi_A(x) = \psi(x)$. Anschaulich beschrieben bedeutet dies, dass die möglichen kleinen Verschiebungen eines Punktes durch finite FFD-Funktionen nicht stärker eingeschränkt sein dürfen, als die Menge aller zulässigen Verschiebungen dieses Punktes, gegeben durch die Menge der zulässigen FFD-Funktionen $\psi \in \Psi_{\mathcal{Z}}(\Omega)$.

Im \mathbb{R}^2 bedeutet dies, dass es zu jedem Punkt aus Ω eine ϵ -Umgebung gibt, in der der Punkt ohne Einschränkung verschoben werden darf (siehe Abbildung 3.7(a)). Diese Bedingung ist leicht zu erfüllen und schon eine einfache Basis, wie $b_i = e_i$, $1 \leq i \leq d$ für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, ist in diesem Sinn 0-flexibel. Es existieren aber auch finite FFD-Räume, die nicht 0-flexibel sind. Dies ist die schwächste Form der Flexibilität.

Die nächst höhere Form der Flexibilität, die 1-Flexibilität, wird durch die Betrachtung der Tangentenvektoren \vec{v} an die Kurve c im Punkt x erreicht. Es wird nun für den Tangentenvektor eine ähnliche Bedingung wie für den einzelnen Punkt x definiert. Man betrachte eine reguläre einmal stetig differenzierbare Kurve c , die durch x geht. Sei \vec{v} der Tangentenvektor von c im Punkt $x = c(t_0)$, also

$$\vec{v} = \left. \frac{d}{dt} c(t) \right|_{t=t_0}. \quad (3.32)$$

Die Menge der finiten FFD-Funktionen Φ_B ist Tangenten- oder 1-flexibel im Punkt x , falls sie 0-flexibel ist und ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass es zu jeder Tangente $\vec{v}' \in B_\epsilon(\vec{v})$ ein $\varphi_A \in \Phi_B$ gibt mit

$$\left. \frac{d}{dt} \varphi_A(c(t)) \right|_{t=t_0} = \vec{v}'. \quad (3.33)$$

Im \mathbb{R}^2 und für einen fixierten Punkt $x \in \Omega$ ist dies vergleichbar mit einer Rotation des Raumes im Punkt x oder einer Streckung (siehe Abbildung 3.7(b)). In dem Beispiel wurde der Punkt festgehalten um eine bessere Anschauung zu ermöglichen.

Bevor die Flexibilität einer Menge von finiten FFD-Funktionen definiert wird, werden noch einige vorbereitende Definitionen benötigt.

Definition 3.12. Sei $c \in C^k([a, b], \Omega)$ eine regulär parametrisierte Kurve und $\psi \in \Psi(\Omega)$ sei ein Raum von k -mal stetig differenzierbaren FFD-Funktionen. Dann ist die C^k -Norm von $\Delta\psi := \psi - \mathcal{I}$ gegeben durch

$$\|\Delta\psi\|_{C^k} := \sup_{\|c\|_{C^k} \leq 1} \|\Delta\psi \circ c\|_{C^k}. \quad (3.34)$$

Dabei ist $\|\cdot\|_{C^k([a,b])}$ die C^k -Norm über $[a, b]$.

$T_f^k(t; t_0)$ bezeichne das Taylorpolynom der Funktion f vom Grad k an der Stelle t_0 . Die allgemeine Definition der Flexibilität wird für die restringierten FFD-Räumen angegeben. Die Flexibilität einer Menge von finiten FFD-Funktionen ist wie folgt definiert.

Definition 3.13. Sei $x \in \Omega$ und $c \in C^k([a, b], \Omega)$, $\|c\|_{C^k} \leq 1$ eine regulär parametrisierte Kurve mit $c(t_0) = x$, $t_0 \in (a, b)$. Eine Menge finiter FFD-Funktionen $\mathcal{M}(B, \mathcal{A})$ heißt k -flexibel im Punkt x , falls ein $\epsilon > 0$ und ein $\gamma > 0$ existieren, so dass für jedes $\psi \in \Psi_Z^n(\Omega)$ mit

$$\|\Delta\psi\|_{C^k} < \gamma \quad (3.35)$$

ein zulässiges $A \in \mathcal{A}$ existiert, für das

$$T_{\psi \circ c}^k(t; t_0) = T_{\varphi_A \circ c}^k(t; t_0) \quad (3.36)$$

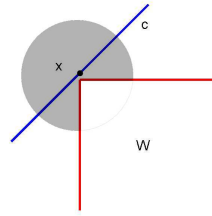
für alle $t \in B_\epsilon(t_0)$ gilt.

Die Definition bezieht sich nur auf die Menge der global zulässige FFD-Funktionen. Falls die Definition auf die Menge der lokal zulässigen FFD-Funktionen erweitert wird, wäre es nötig sicherzustellen, dass die Kurve ein zulässiges geometrisches Objekt ist. Dies führt lokal wieder zu der gleichen Definition. Also beschränkt man sich bei der Flexibilität auf den Vergleich der finiten FFD-Funktionen mit den global zulässigen FFD-Funktionen.

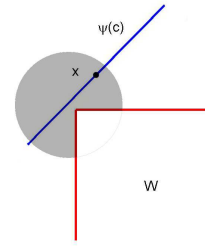
Beispiele 3.9. In Abbildung 3.8 ist an einigen Beispielen die Definition der Flexibilität aufgezeigt. Man betrachtet einen Punkt x auf einer Kurve c und ein Hindernis W . Abbildung 3.8(a) zeigt die zu dem Punkt x gehörende ϵ -Umgebung. Eine Menge von FFD-Funktionen ist dementsprechend 0-flexibel, wenn der Punkt x an jede Stelle der ϵ -Umgebung verschoben werden kann. Die Abbildungen 3.8(b) und (c) zeigen solche Deformationen, die die Kurve zulässig deformieren und den Punkt x innerhalb der ϵ -Umgebung verschieben. Da alle FFD-Funktionen, die x in das Hindernis W verschieben, nicht zulässig sind (siehe Abbildung 3.8(d)), wird nicht die gesamte ϵ -Umgebung betrachtet, sondern nur der Schnitt der ϵ -Umgebung mit dem Komplement von W .

Für die 1-flexiblen Funktionenräume betrachtet man den Tangentenvektor \vec{v} der Kurve c im Punkt x . In Abbildung 3.9(a) ist eine lineare FFD verwendet

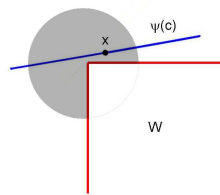
3 Freiform-Deformation



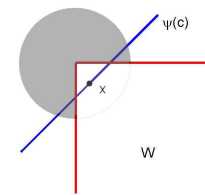
(a) Umgebung für 0-Flexibilität



(b) zulässige lineare Deformation



(c) zulässige lineare Deformation

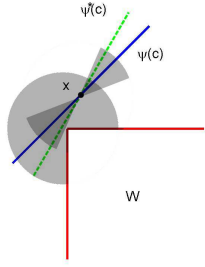


(d) nicht zulässige Deformation

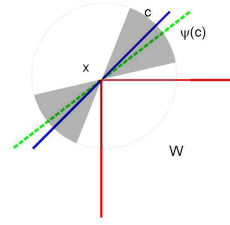
Abbildung 3.8: Beispiele für Deformationen mit Hindernis W

worden. Dabei ist $\psi(c)$ die konstante Deformation, innerhalb der ϵ -Umgebung für die 0-flexiblen Funktionen und $\psi^*(c)$ die lineare Deformation, für die die ϵ -Umgebung für die 1-flexiblen Funktionen angegeben ist. Die Bedeutung der ϵ -Umgebung für die 0-Flexibilität ist aus den vorgehenden Beispielen bekannt. Die neu hinzugekommene graue Fläche zeigt die Bedeutung der 1-Flexibilität an. Da Tangente und Kurve in x übereinstimmen, muss die Kurve um x soweit rotieren können, dass sie den kompletten grauen Bereich überdeckt, der Tangentenvektor sich also frei bewegen lässt. Wäre die Kurve nicht durch eine Gerade gegeben, so müsste diese Bedingung für den Tangentenvektor der Kurve im Punkt x erfüllt sein.

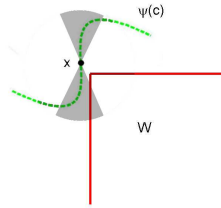
Abbildung 3.9(b) zeigt, welchen Bereich die Deformation des Tangentenvektors abdecken muss, falls der Punkt x Teil des Hindernisses, bzw. fixiert ist. Da der Punkt fixiert ist, ist die ϵ -Umgebung für die 0-Flexibilität nicht vorhanden. Es ist



(a) Umgebung für 0- und 1-Flexibilität



(b) Umgebung für 1-Flexibilität



(c) Umgebung für 1-Flexibilität

Abbildung 3.9: Weitere Beispiele für Deformationen mit Hindernis W

dementsprechend nur der Bereich für die 1-Flexibilität angegeben, dieser ist durch das Hindernis beschränkt, da der Punkt ein Teil des Hindernisses ist. Würde der Tangentenvektor in das Hindernis hineinzeigen, so würde die Kurve auch in das Hindernis hineinführen und wäre damit nicht zulässig.

In Abbildung 3.9(c) ist ebenfalls nur die Umgebung für die 1-flexiblen Funktionen angegeben, die Abbildung soll zeigen, dass das Hindernis diese Umgebung, anders als bei der Umgebung für die 0-flexiblen Funktionen, nicht beschränkt, da eine deformierte Kurve, deren Tangente durch das Hindernis geht, nicht durch das Hindernis verlaufen muss. Im Gegensatz zu dem vorigen Beispiel ist der betrachtete Punkt nicht Teil des Hindernisses bzw. nicht fixiert.

Betrachten wir eine Menge von finiten FFD-Funktionen $\mathcal{M}(B, \mathcal{A})$. Sei im Folgenden $m_x(\mathcal{M}(B, \mathcal{A}))$ der maximale Wert der Flexibilität im Punkt x .

Definition 3.14. Sei \mathcal{Z} die Menge aller zulässigen geometrischen Objekte und sei

$$\Omega_{\mathcal{Z}} := \bigcup_{u \in \mathcal{Z}} u, \quad (3.37)$$

dann definiert man die Flexibilität flex als

$$\text{flex}(\mathcal{M}(B, \mathcal{A})) := \min_{x \in \Omega_{\mathcal{Z}}} m_x(\mathcal{M}(B, \mathcal{A})). \quad (3.38)$$

Beispiele 3.10. Um die Definition noch etwas verständlicher zu machen, schauen wir noch einmal zwei Beispiele an. Für eine 0-flexible Menge \mathcal{M}_0 von FFD-Funktionen muss nach Definition gelten, dass es ein $\varphi_A \in \mathcal{M}_0$ gibt mit

$$T_{\psi \circ c}^0(t; t_0) = \psi(c(t_0)) = \varphi_A(c(t_0)) = T_{\varphi_A \circ c}^0(t; t_0). \quad (3.39)$$

Dies ist eben jene Bedingung, die für die 0-Flexibilität steht. Betrachten wir sie genauer: Da $\|\Delta\psi\| < \epsilon$ gilt, liegt $\psi(c(t_0))$ in einer ϵ -Umgebung von $c(t_0)$. Es genügt also sicherzustellen, dass in $U := \{\varphi_A(c(t_0)) \mid \varphi_A \in \mathcal{M}\}$ eine Umgebung von $c(t_0)$ enthalten ist.

Damit eine Menge \mathcal{M} von FFD-Funktionen 1-flexibel ist, muss eine FFD-Funktion $\varphi_A \in \mathcal{M}$ existieren mit

$$\psi(c(t_0)) = \varphi_A(c(t_0)) \quad (3.40)$$

und

$$\left. \frac{d}{dt} \psi(c(t)) \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d}{dt} \varphi_A(c(t)) \right|_{t=t_0}. \quad (3.41)$$

Dann stimmen auch die Taylorpolynome bis zum Grad eins überein.

Damit wurde die Flexibilität von Mengen finiter FFD-Funktionen in einem festen aber beliebigen Punkt betrachtet. Dabei wird nicht berücksichtigt, welchen Einfluß die FFD-Funktionen auf den Rest des Raumes haben. Da die meisten geometrischen Objekte aus mehr als einem Punkt bestehen, scheint es sinnvoll zu sein, die Flexibilität in mehreren Punkten gleichzeitig zu fordern.

Im Folgenden wird die Flexibilität für zwei Punkte untersucht. Dafür werden zwei Punkte x_1, x_2 mit dem Abstand $d(x_1, x_2) > \delta$ betrachtet. Angenommen, es existiert eine Menge finiter FFD-Funktionen \mathcal{M} , die in beiden Punkten k -flexibel ist. Dann ist nicht sichergestellt, dass eine gegebene k -flexible Deformation von x_1 ebenfalls k -flexibel für x_2 ist. Dazu geben wir zuerst ein Beispiel an und danach wird die Flexibilität für zwei Punkte definiert.

Beispiel 3.11. Sei $d = 2$ und $B := [e_1x_1, e_2x_2]$. Sei weiter der Raum nicht restringiert, also $\mathcal{D} = \mathfrak{P}(\Omega)$, dann gilt $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$. Die Menge $\mathcal{M} = (\Phi_B(\Omega), \mathcal{A})$ ist 0-flexibel in jedem Punkt, da für jeden Punkt $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ die Gleichung

$$\varphi_A(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

für beliebiges $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2)$ immer eine Lösung $A = (a_1, a_2) \in \mathcal{A}$ besitzt.

Seien weiter P und Q zwei Punkte in Ω mit $P \neq Q$. Für jedes $\varphi_A \in \Psi_B$ mit $\psi_A(P) = P$, folgt dass $A = [0, 0]$ und damit $\psi_A(Q) = Q$ gilt. Das heißt, eine Fixierung eines Punkte führt zur Fixierung aller Punkte von Ω . Die Punkte lassen sich also nicht unabhängig von einander bewegen. Falls aber

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

gewählt ist, so folgt aus einer Fixierung von P keine Fixierung von Q .

Definition 3.15. Sei $x_1, x_2 \in \Omega$ mit $d(x_1, x_2) > \delta$. Weiter sei $c \in C^k([a, b], \Omega)$, $\|c\|_{C^k} \leq 1$ eine regulär parametrisierte Kurve mit $c(t_0) = x_0$ und $c(t_1) = x_1$ mit $t_0, t_1 \in (a, b)$. Eine Menge k -flexibler finiter FFD-Funktionen $\mathcal{M}(B, \mathcal{A})$ heißt (δ, k) -flexibel, falls ein $\epsilon > 0$ und ein $\gamma > 0$ existieren, so dass für jedes k -mal stetig differenzierbare $\psi \in \Psi_{\mathcal{Z}}(\Omega)$ mit $\|\Delta\psi\|_{C^n} < \gamma$ ein zulässiges $A \in \mathcal{A}$ existiert, für das

$$T_{\psi \circ c}^k(t; t_0) = T_{\varphi_A \circ c}^k(t; t_0) \quad (3.44)$$

für alle $t \in B_\epsilon(t_0)$ und

$$T_{\psi \circ c}^n(t; t_1) = T_{\varphi_A \circ c}^n(t; t_1) \quad (3.45)$$

für alle $t \in B_\epsilon(t_1)$ gilt.

Im Vordergrund dieser Arbeit soll aber die Flexibilität einer Menge von FFD-Funktionen in einem Punkt stehen. Aus diesem Grund wird hier auf die δ -Flexibilität nicht weiter eingegangen.

Nachdem nun ein geeignetes Mittel angegeben wurde, um Mengen von FFD-Funktionen zu klassifizieren, werden spezielle finite FFD-Räume, die polynomialen FFD-Räume, betrachtet.

3.2.2 POLYNOMIALE FFD

In diesem Unterkapitel werden spezielle finite FFD-Räume betrachtet. Als erstes soll der Raum der multivariaten Polynome betrachtet werden. Aus dem Eindimensionalen ist bekannt dass die Polynome (Satz von Weierstraß) gute Approximationseigenschaften haben, dies lässt sich auf den \mathbb{R}^d (Satz von Stone-Weierstraß) ebenfalls zeigen. Aus diesem Grund werden hier polynomiale FFD-Räume betrachtet.

Man beginnt mit geeigneten Polynombasen für Teilräume des Raumes \mathcal{P} , der multivariaten Polynome, über Ω . Zur Darstellung der Basisfunktionen bedient man sich der Linearen Algebra und gibt die Basis als eine Matrix an. Dabei stehen in den Spalten der Matrix die Basisfunktionen b_i der Basis B . Als erstes wird die multivariate Polynombasis definiert.

Definition 3.16. Sei $I := \{\alpha \in \mathbb{N}^d \mid |\alpha| \leq k\}$ die Menger aller Multiindizes deren Betrag kleiner gleich k ist und mit einer lexikographischen Ordnung versehen sind. Dann erhält man die multivariate Polynombasis $B_{\mathcal{P}}^k$ des multivariaten Polynomraumes \mathcal{P}_{Ω}^k der Ordnung $k + 1$ über Ω durch

$$B_{\mathcal{P}}^k(x) := \begin{pmatrix} b_1(x) & \dots & b_m(x) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & b_1(x) & \dots & b_m(x) \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

mit $x \in \Omega$, $m := |I| = \binom{d+k}{k}$ und

$$b_i(x) = x^{\alpha_i} = x_1^{\alpha_{i,1}} \dots x_d^{\alpha_{i,d}}. \quad (3.47)$$

Die Dimension der allgemeinen Polynombasis ist gegeben durch

$$n = \dim(B_{\mathcal{P}}^k) = d \binom{d+m}{m} = \frac{(d+m)!}{m!(d-1)!}. \quad (3.48)$$

Ausgehend von dieser Basis erhält man die nachstehenden FFD-Funktionen.

Definition 3.17. Eine multivariate polynomiale FFD-Funktion $\varphi_A(x)$ ist gegeben durch einen Vektor von Freiheitsgraden A und die Basis $B_{\mathcal{P}}^n$ mit

$$\varphi_A(x) := x + B_{\mathcal{P}}^k(x)A^T \quad (3.49)$$

wobei mit $A = (A_1, \dots, A_d)$ und $A_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,m})$

$$B_{\mathcal{P}}^k(x)A^T = e_1 b_1(x)A_1^T + \dots + e_d b_d(x)A_d^T \quad (3.50)$$

$$b_i(x)A_i^T = \sum_{|\alpha| \leq n} a_{i,j} x^{\alpha_i} \quad (3.51)$$

gilt.

Die Menge der benötigten Freiheitsgrade ist bei multivariaten Polynomräumen mit geringer Ordnung bereits sehr hoch, wie Tabelle 3.1 zeigt. Dabei ist zu beachten, dass der zur Optimierung nötige Aufwand im Allgemeinen überproportional zu der Anzahl der zur Optimierung verwendeten Parameter steigt. Abhängig von der Dauer einer einzelnen Auswertung des Zielfunktional und der Existenz eines Gradienten, können Optimierungsprobleme mit wenigen Parametern bereits schwierig zu berechnende Optimierungsprobleme darstellen.

d, k	1	2	3	4	5
2	6	12	20	30	42
3	12	30	60	105	168
4	20	60	140	280	504

Tabelle 3.1: Anzahl der Freiheitsgrade für multivariate Polynomräume

Beispiele 3.12. Man betrachte die allgemeine Polynombasis $B_{\mathcal{P}}^k$ für $k = 2$ und $d = 2$. Dann ist $B_{\mathcal{P}}^2$ gegeben durch

$$B_{\mathcal{P}}^2 = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1 x_2 & x_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1 x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

Der dazugehörige Vektor von Freiheitsgraden A ist aus dem \mathbb{R}^{12} .

Man betrachte als weiteres Beispiel die allgemeine Polynombasis $B_{\mathcal{P}}^k$ für $k = 2$ und $d = 3$. In Abbildung 3.10 kann die Wirkung der FFD-Funktionen auf das Einheitsquadrat $[0,1]^3$ im \mathbb{R}^3 betrachtet werden. Ausgehend von dem geometrischen Objekt (3.10.a) wird eine lineare (3.10.b), eine homogen quadratische (3.10.c) und eine quadratische (3.10.d) FFD-Transformation auf das geometrische Objekt angewandt. Zu beachten ist, dass Abbildung (3.10.a) ebenfalls eine FFD-Transformation mit $\varphi_A = \mathcal{I}$ ist.

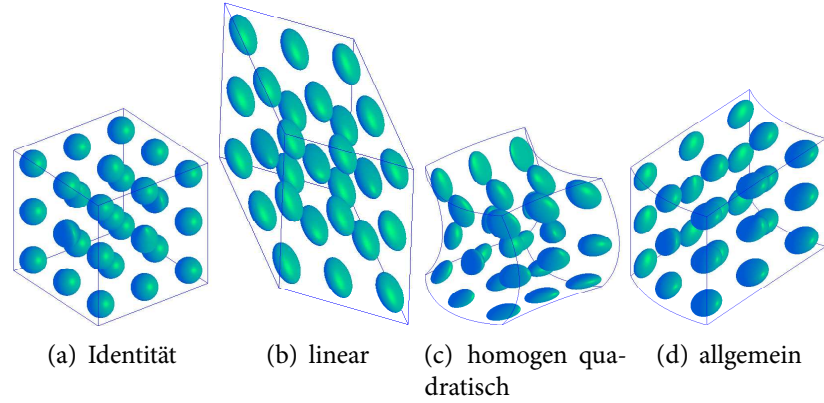


Abbildung 3.10: polynomiale FFD-Beispiele

In Kapitel 3.1.1 wurde gezeigt, dass die lokalen FFD-Funktionen unter hinreichenden Bedingungen das nichtlineare geometrische Optimierungsproblem (2.6) lösen. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass der finite FFD-Raum der polynomialen FFD-Funktionen ebenfalls das nichtlineare geometrische Optimierungsproblem näherungsweise lösen kann. Dafür zeigen wir als erstes, dass es möglich ist, mit den finiten polynomialen FFD-Funktionen die FFD-Funktionen gleichmäßig zu approximieren.

Lemma 3.9. *Sei $\psi \in \Psi(\Omega)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ kompakt, dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ eine finite FFD-Funktion $\varphi_A \in \mathcal{P}$ mit $\|\psi - \varphi_A\|_\infty < \epsilon$.*

Beweis. Der Beweis stützt sich im wesentlichen auf den Satz von Stone-Weierstrass (siehe [Wero5]). Sei $\epsilon > 0$ und $\psi \in \Psi(\Omega)$. Dann kann ψ in seine einzelnen Komponenten zerlegt werden und man erhält $\psi = (\psi_1 \ \dots \ \psi_d)^T$. Im Folgenden zeigt man, dass für jede einzelne Komponente ψ_i der Satz von Stone-Weierstrass angewendet werden kann und eine finite FFD-Funktion $\phi_A \in \Phi_{B_P}^n$ existiert, für deren i -te Komponente $(\varphi_A)_i$ die gleichmäßige Konvergenz gegen ψ_i gilt. Danach muss nur noch gezeigt werden, dass die Lösungen $(\varphi_A)_i$ und $(\varphi_A)_j$ für $j \neq i$ unabhängig sind.

Sei im Folgenden i beliebig aber fest. Die i -te Komponente der finiten FFD-Funktion ist gegeben durch

$$(\varphi_A)_i = b_i(x) A_i^T = \sum_{j \in I} a_{i,j} x^{\alpha_j}. \quad (3.53)$$

Da die polynomialen FFD-Funktionen eine Algebra bilden, in der die Konstanten Funktionen enthalten sind und die Punkte trennend ist, kann man den Satz von Stone-Weierstrass anwenden. Dieser besagt, dass ein $p \in \mathcal{P}$ mit

$$\|\psi_i - p_i\|_\infty < \epsilon \quad (3.54)$$

existiert. Da die b_i eine Basis von \mathcal{P} bilden, existiert ein Vektor von Freiheitsgraden A_i mit $p_i = (\varphi_A)_i$ und damit

$$\|\psi_i - (\varphi_A)_i\|_\infty < \epsilon. \quad (3.55)$$

Es bleibt also noch zu zeigen, dass die einzelnen Komponenten der polynomialen FFD-Funktionen voneinander unabhängig sind. Dies gilt, da für die i -te Komponente von φ_A nur die Einträge A_i wesentlich sind. Alle anderen Einträge von A werden mit $e_j, j \neq i$ multipliziert. \square

Damit ist nun sichergestellt, dass wir jede FFD-Funktion approximieren können. Als nächstes wendet man dies auf die lokal zulässigen FFD-Funktionen an.

Theorem 3.2. Sei $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ offen und $\mathcal{H}_u \subseteq \mathcal{D}$ die Homöomorphieklasse von u . Sei weiter $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig bezüglich der von $\|\cdot\|_\infty$ induzierten Hausdorffmetrik und sei $u^* \in H$ ein lokales Minimum von f . Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\varphi_A \in \Phi_{B_p}^n$ mit $|f(u^*) - f(\varphi_A(u))| < \epsilon$.

Beweis. Da u und u^* in einer Homöomorphieklasse liegen, gibt es also einen Homöomorphismus F der u nach u^* abbildet. Nach Lemma 3.3 gibt es dann eine $\psi \in \Psi_{\mathcal{Z}, u}$, mit $\psi|_u = F$. Dann gibt es nach Lemma 3.9 eine finite FFD-Funktion $\varphi_A \in \Phi_{B_p}^n$ mit $\|\psi - \varphi_A\|_\infty < \delta$ für jedes $\delta > 0$. Es gilt,

$$\begin{aligned} |f(u^*) - f(\varphi_A(u))| &= |f(u^*) - f(\psi(u)) + f(\psi(u)) - f(\varphi_A(u))| \\ &\leq |f(u^*) - f(\psi(u))| + |f(\psi(u)) - f(\varphi_A(u))| \\ &= |f(\psi(u)) - f(\varphi_A(u))| \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von f , existiert ein $\delta > 0$, so dass $|f(\psi(u)) - f(\varphi_A(u))| < \epsilon$ gilt. \square

Zwar wurde gezeigt, dass der Fehler beliebig klein wird, dies geschieht aber in der Maximumsnorm, die ungeeignet sein kann. So wäre es sinnvoll, die Approximationseigenschaften der Basis auch in einer Sobolevnorm zu betrachten.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Menge der multivariaten Polynome, die durch die Polynombasis $B_{\mathcal{P}}^k$ gegeben ist, k -flexibel ist.

Lemma 3.10. *Die Menge der global zulässigen finiten FFD-Funktionen zur Basis $B_{\mathcal{P}}^k$*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{P}}^k := \{\varphi_A \in \Phi_{B_{\mathcal{P}}^k}(\Omega) \mid A \in \mathcal{A}\} \quad (3.56)$$

ist k -flexibel falls ein $\delta > 0$ existiert, so dass eine ϵ -Umgebung $B_\delta(A_{\mathcal{I}})$ in den zulässigen Freiheitsgraden \mathcal{A} enthalten ist, $B_\delta(A_{\mathcal{I}}) \subseteq \mathcal{A}$. Insbesondere ist $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}^k$ k -flexibel auf einem nicht restringierten Raum.

Beweis. Der Beweis folgt direkt aus Lemma 3.11, da die reine Polynombasis (siehe Definition 3.18) in der allgemeinen enthalten ist. \square

Es soll noch eine weitere polynomiale Basis angeführt werden. Dabei soll die Anzahl der Freiheitsgrade verringert werden, während die Flexibilität erhalten bleibt.

Definition 3.18. *Sei α ein lexikographisch geordneter Multiindex mit $|\alpha| \leq k$ (wie in Definition 3.16), wobei immer nur ein Eintrag von α_i ungleich Null ist. Die reine Polynombasis $B_{\mathcal{R}}^k$ der Ordnung $k + 1$ über Ω ist gegeben durch*

$$B_{\mathcal{R}}^k(x) := \begin{pmatrix} b_1(x) & \dots & b_m(x) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & b_1(x) & \dots & b_m(x) \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

mit $x \in \Omega$, $m = dk$ und

$$b_i(x) = x_1^{\alpha_{i,1}} \dots x_d^{\alpha_{i,d}}. \quad (3.58)$$

Die Dimension der reinen Polynombasis ist gegeben durch

$$n = \dim(B_{\mathcal{R}}^k) = d + d^2k. \quad (3.59)$$

Diese Basis benötigt weniger Koeffizienten als die allgemeine Polynombasis, wie die Tabelle 3.2 zeigt.

Beispiel 3.13. *Betrachten wir die reine Polynombasis $B_{\mathcal{R}}^n$ für $n = 2$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Dann ist $B_{\mathcal{R}}^2$ gegeben durch*

$$B_{\mathcal{P}}^2 = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_2^2 & 0 \\ 0 & & & & & 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

Der dazugehörige Vektor von Freiheitsgraden A ist aus dem \mathbb{R}^{10} .

d, k	1	2	3	4	5
2	6	10	14	18	22
3	12	21	30	39	48
4	20	36	52	68	84

Tabelle 3.2: Anzahl der Freiheitsgrade für reine Polynomräume

Lemma 3.9 lässt sich nicht für die reine Polynombasis formulieren, da die Polynome aus dem von der Basis aufgespannten Raum keine Algebra bezüglich der Multiplikation bilden. Denn während

$$p = 1 + x_1 + x_2 \quad (3.61)$$

in der Menge der reinen Polynome liegt, ist

$$p^2 = 1 + x_1 + x_2 + x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \quad (3.62)$$

nicht in dieser enthalten.

Lemma 3.9 ist für theoretische Ergebnisse interessant, in den Anwendung hingegen wird die Flexibilität einer Menge von FFD-Funktionen im Allgemeinen als wichtige Eigenschaft verwendet. Aus diesem Grund betrachtet man die reine Polynombasis weiter, auch wenn sie das Lemma nicht erfüllt.

Lemma 3.11. Die Menge $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}^k$ der global zulässigen finiten FFD-Funktionen zur Basis $B_{\mathcal{R}}^k$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}}^k := \{\varphi_A \mid \varphi_A \in \Phi_{B_{\mathcal{R}}^k}(\Omega), A \in \mathcal{A}\} \quad (3.63)$$

ist k -flexibel, falls ein $\delta > 0$ existiert, so dass eine δ -Umgebung $B_\delta(A_{\mathcal{I}})$ in den zulässigen Freiheitsgraden \mathcal{A} enthalten ist, $B_\delta(A_{\mathcal{I}}) \subseteq \mathcal{A}$. Insbesondere ist $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}^k$ k -flexibel auf einem nicht restringierten Raum.

Beweis. Wir zeigen als erstes, dass $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}^k$ auf einem nicht restringierten Raum k -flexibel ist. Sei $x \in \Omega$ ein beliebiger Punkt und c eine regulär parametrisierte k -mal stetig differenzierbare Kurve mit

$$c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_i(t) \\ \vdots \\ c_d(t) \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

und $c(t_0) = x$. Für die Taylorpolynome im Punkt t_0 schreiben wir

$$\sum_{j=0}^k \alpha_{i,j} (t - t_0)^j = T_{\psi \circ c}^k(t; t_0) \quad (3.65)$$

$$\sum_{j=0}^k \alpha_{i,j} (t - t_0)^j = T_{\varphi_A \circ c}^k(t; t_0). \quad (3.66)$$

mit $\alpha_i = (\alpha_{i,0}, \dots, \alpha_{i,k})$ und $\beta_i = (\beta_{i,0}, \dots, \beta_{i,k})$. Um zu zeigen, dass $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}^k$ k -flexibel ist, d.h. es existiert ein $A \in \mathcal{A}$ für das

$$T_{\psi \circ c}^k(t; t_0) = T_{\varphi_A \circ c}^k(t; t_0) \quad (3.67)$$

gilt, genügt es zu zeigen, dass die Gleichung

$$e_i^T T_{\psi \circ c}^k(t; t_0) = e_i^T T_{\varphi_A \circ c}^k(t; t_0) \quad (3.68)$$

für jedes $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq d$ und für jedes $\beta_i \in \mathbb{R}^{k+1}$ lösbar ist. Dies ist erfüllt, falls $\beta \subseteq \alpha$ gilt.

Da die Kurve regulär parametrisiert wird, existiert ein $r \in [1, d]$ mit $c'_r(x) \neq 0$. Dann existiert eine ϵ -Kugel $B_\epsilon(x)$ in der die Umkehrfunktion c_r^{-1} von c_r existiert. Die Umkehrfunktion ist gegeben durch $t = c_r^{-1}(s)$. Sei $\tilde{c} := c \circ c_r^{-1}(s)$, dann stimmt die Kurve

$$\tilde{c}(s) = \begin{pmatrix} c_1(c_r^{-1}(s)) \\ \vdots \\ s \\ \vdots \\ c_d(c_r^{-1}(s)) \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

auf B_ϵ mit c überein.

Wir zeigen nun, dass

$$e_i^T T_{\psi \circ \tilde{c}}^k(s; s_0) = e_i^T T_{\varphi_A \circ \tilde{c}}^k(s; s_0) \quad (3.70)$$

gilt. Sei i , fest aber beliebig, dann ist α_i gegeben durch

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{0!} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{k!} \end{pmatrix} W_{i,B(\tilde{c})}(s_0) \begin{pmatrix} a_{1+mi} \\ \vdots \\ a_{m(i+1)} \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

wobei $W_{i,B(\tilde{c})}(s_0)$ die Wronskimatrix von $\{b_{1+im}, \dots, b_{m(i+1)}\} \subseteq B(\tilde{c}(s))$ im Punkt $s = s_0$ bezeichnet. Die Wronskimatrix ist dann gegeben durch

$$W_{i,B(\tilde{c}(s))} = \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 & s^3 & \dots & s^k \\ 0 & 1 & 2s & 3s^2 & \dots & ks^{k-1} \\ 0 & 0 & 2 & 6s & \dots & k(k-1)s^{k-2} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k! \end{pmatrix}. \quad (3.72)$$

Die Matrix ist eine obere Dreiecksmatrix und die Elemente auf der Diagonalen sind ungleich Null, also ist sie regulär für jedes s . Damit ist das lineare Gleichungssystem

$$\beta_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{0!} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{k!} \end{pmatrix} W_{i,B(\tilde{c})}(s_0) \begin{pmatrix} a_{1+mi} \\ \vdots \\ a_{m(i+1)} \end{pmatrix} =: DW_i A_i \quad (3.73)$$

für alle β_i lösbar. Dann gilt

$$T_{\psi \circ \tilde{c}}^k(s; s_0) = T_{\varphi_A \circ \tilde{c}}^k(s; s_0) \quad (3.74)$$

da die Basisfunktion immer nur in einer Raumkomponente ungleich 0 sind. Damit gilt aber auch

$$T_{\psi \circ \tilde{c} \circ c_r}^k(t; t_0) = T_{\psi \circ c}^k(t; t_0) = T_{\varphi_A \circ c}^k(t; t_0) = T_{\varphi_A \circ \tilde{c} \circ c_r}^k(t; t_0) \quad (3.75)$$

da $\tilde{c} \circ c_r = c$ gilt.

Es bleibt der restringierte Fall, sei also $\mathcal{A} \neq \mathbb{R}^d$. Nach Voraussetzung existiert eine zulässige offene δ -Umgebung von $A_{\mathcal{I}}$. Dann ist die Menge der durch Gleichung 3.73 gegebenen $\{\beta_i\}$ zu den A_i aus der Umgebung von $A_{\mathcal{I}}$ ebenfalls eine offene δ^* -Umgebung. Dann existiert auch ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $\Delta\psi$ mit $\|\Delta\psi\| < \epsilon$, β_i aus dieser offenen Umgebung ist. \square

Abschließend werden die beiden hier vorgestellten Basen noch einmal an einem Beispiel verglichen.

Beispiel 3.14. Betrachten wir erneut Beispiel 2.1 und wenden die reinen und die allgemeinen polynomialen FFD-Räume auf das Beispiel an. Für $n = 1$ sind der reine und der allgemeine Raum identisch und die Bogenlänge verringert sich auf

3 Freiform-Deformation

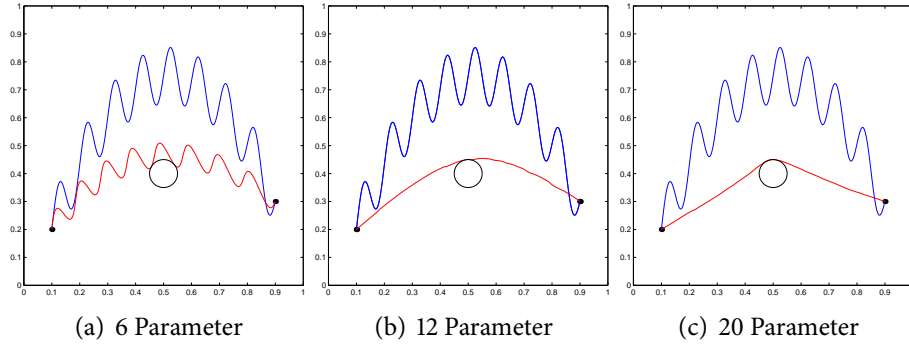


Abbildung 3.11: FFD-Transformationen mit der allgemeinen Polynombasis der Ordnung 2, 3, 4

$L \approx 1.695$ (siehe Abbildung 3.11(a) und Abbildung 3.12(a)). Für $n = 2$ unterscheiden sich die beiden FFD-Räume. Im allgemeinen Fall ergibt sich eine optimale Bogenlänge von 0.916 und im reinen Fall kann die Bogenlänge auf 0.92 reduziert werden (siehe Abbildung 3.11(b) und Abbildung 3.12(b)). Für $n = 3$ ist der Unterschied wieder geringer, wir erhalten im reinen Fall für die Bogenlänge $L_s = 0.901678$ und im allgemeinen Fall $L_a = 0.901677$ (siehe Abbildung 3.11(c) und Abbildung 3.12(c)). Scheinbar sind die FFD-Räume für Kurven in diesem Beispiel nahezu gleichwertig. Die hier verwendeten FFD-Funktionen waren für $n = 2, 3$ nur lokal zulässig, für $n = 1$ global zulässig.

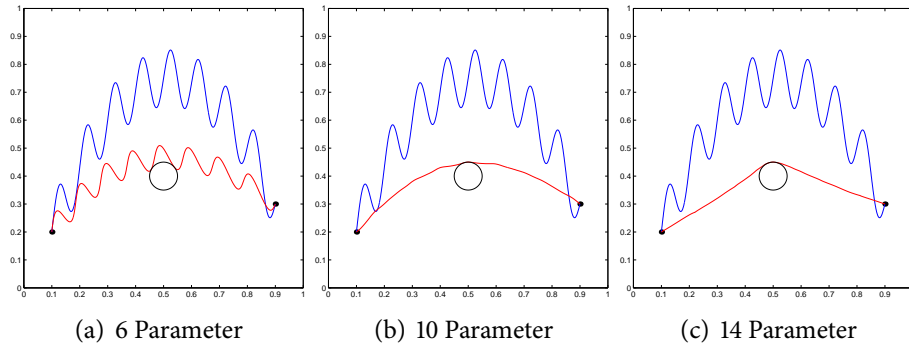


Abbildung 3.12: FFD-Transformationen mit der reinen Polynombasis der Ordnung 2, 3, 4

Bemerkung 3.10. *Es ist zu bemerken, dass das Beispiel 3.14 leicht einen falschen Eindruck von der Mächtigkeit der FFD-Funktionen vermitteln kann. Deswegen ist es notwendig sich vor Augen zu führen, dass es sich hier nur um lokal zulässige FFD-Funktionen handelt. Diese bilden ganz Ω auf eine Kurve ab, wobei die FFD-Deformationen, wenn sie nur auf die Kurve s angewandt werden, injektiv auf s sind. Die Deformationen sind mit wenigen Freiheitsgraden möglich, da nur wenige Restriktionen zu erfüllen sind. Würde man zum Beispiel weitere Kurven mit fixierten Anfangs- und Endpunkten in dem Beispiel verwenden, so erhielte man unter Umständen keine zulässigen FFD-Funktionen außer der Identität. Es ist also notwendig, die Freiheitsgrade von den Restriktionen zu entkoppeln, damit die Freiheitsgrade nicht zur Erfüllung der Restriktionen verwendet werden. Aus diesem Grund werden hauptsächlich Mengen von global zulässigen FFD-Funktionen betrachtet.*

3.2.3 SPLINE FFD

Nachdem die polynomialen FFD-Funktionen behandelt wurden, werden nachfolgend stückweise polynomiale Funktionen, sogenannte Splinefunktionen betrachtet. Wie wir gesehen haben, eignen sich Polynome zur Approximation. Allerdings hat die Approximation mit Polynomen Nachteile. Die Nachteile bestehen zum einen in der globalen Abhängigkeit der Polynome von den Koeffizienten und zum anderen in der hohen Glattheit der Polynome. Ersteres führt dazu, dass sich lokale Fehler in der Approximation auf das ganze Polynom fortpflanzen und sehr groß werden können. Desweiteren muss für eine hohe Approximationsordnung ein hoher Polynomgrad gewählt werden. Oft sind die gesuchten Funktionen aber nur C^1 oder C^2 und bei der Polynomapproximation wird versucht, sie mit C^∞ -Funktionen zu approximieren. Dies macht die Approximation sehr aufwändig und führt zu hohen Ordnungen von Polynomen.

Um die genannten Probleme zu lösen, verwendet man stückweise polynomiale Funktionen, sogenannte Splines. Eine allgemeine Einführung über Splines kann man in [Die93], [Hö98], [HL92] und [PT97] finden. Da die Splines in dieser Arbeit nur als Hilfsmittel benutzt werden und nicht zum Kern der Arbeit gehören, sind im Folgenden nur die wichtigsten Eigenschaften ohne Beweis aufgeführt. Für die Beweise sei auf die oben genannten Arbeiten verwiesen.

Zu Beginn wird der Raum $S_{k,T}(D)$ der Splines der Ordnung k definiert.

Definition 3.19. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $T := \tau_1, \dots, \tau_{m+k}, \tau_i < \tau_{i+1}$ eine Knotenfolge mit $\tau_j \in \mathbb{R}$. Ein Spline der Ordnung k über der Knotenfolge T ist eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, die auf den Intervallen $[\tau_j, \tau_{j+1})$ mit einem Polynom der Ordnung k übereinstimmt und an einem Knoten $(k-2)$ -mal stetig differenzierbar ist. Der Raum aller Splines der Ordnung k über T wird im folgenden mit $S_{k,T}(D)$ bezeichnet.

Der kanonische Definitionsbereich der Splines der Ordnung k ist gegeben durch $D := [\tau_k, \tau_{m+1})$ und weiter bezeichnen wir mit $s_j^k := [\tau_j, \tau_{j+k}]$ ein Teilintervall des Definitionsgebietes und mit $|s_j^k|$ die Länge des Intervalls. Für unsere Zwecke werden nur solche Knotenfolgen betrachtet, die innerhalb des Definitionsbereichs keine doppelten Knoten enthalten, also für alle $j \in [k, m]$ gilt $\tau_j < \tau_{j+1}$. Diese Knotenvektoren sind nicht entartet. In den meisten Fällen werden äquidistante Knotenvektoren $T := h\mathbb{Z}$ betrachtet.

Als nächstes soll eine Basis für $S_{k,T}(D)$ angegeben werden, damit der Raum als finiter FFD-Raum verwendet werden kann. Als Basis werden die *B-Splines* verwendet, da diese besonders günstige Basiseigenschaften haben, wie wir später sehen werden. Dafür definieren wir die B-Splines über die Rekursionsformel.

Definition 3.20. Sei T ein nicht entarteter Knotenvektor und

$$w_j^k(t) := \frac{t - \tau_j}{|s_j^k|}. \quad (3.76)$$

Dann sind die B-Splines der Ordnung $k+1$ gegeben durch die Rekursionsformel

$$b_j^1 := \chi([\tau_j, \tau_{j+1})), \quad (3.77)$$

$$b_j^{k+1} := w_j^k b_j^k + (1 - w_{j+1}^k) b_{j+1}^k. \quad (3.78)$$

Daraus folgt, dass der Träger eines B-Splines durch $\text{supp } b_j^k = s_j^k$ gegeben ist. Da der Träger des Splines nur lokal ist, wirkt sich eine Störung in einem Kontrollpunkt p_j nur auf den Spline im Bereich des Trägers des B-Splines b_j^k aus. Der Rest des Splines ist von einer Änderung in p_j unabhängig. Dies ist ein Vorteil gegenüber den Polynomen, da sich auf diese Weise lokale Störungen nicht auf den ganzen Spline auswirken.

Die Abbildung 3.13 ist ein Beispiel für einen Rekursionsschritt. Nachdem die

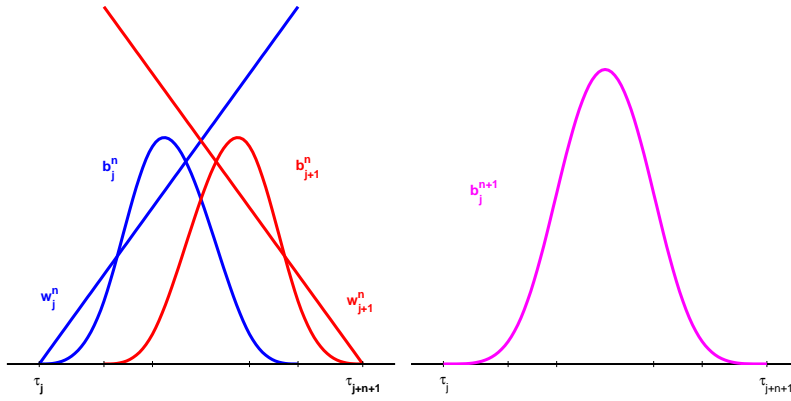


Abbildung 3.13: B-Spline-Rekursionsformel

B-Splines definiert wurden, muss noch gezeigt werden, dass sie eine Basis des $S_{k,T}(D)$ bilden. Nach [HL92] gilt:

Theorem 3.3. *Falls der Knotenvektor $T = [\tau_1, \dots, \tau_{m+k}]$ nichtentartet ist, bilden die B-Splines b_1^k, \dots, b_m^k eine Basis des Splineraums $S_{k,T}(D)$.*

Ausgehend von der B-Spline-Basis können nun die Elemente des Splineraumes angegeben werden.

Definition 3.21. *Ein Spline $s \in S_{k,T}(D)$ in B-Splineform ist gegeben durch*

$$s(t) = \sum_j b_j^k(t) p_j. \quad (3.79)$$

Die Koeffizienten p_j heißen Kontrollpunkte.

Abbildung 3.14 ist ein Beispiel für einen Spline. Splines in B-Splineform lassen sich stabil und effizient mit dem deBoor-Algorithmus auswerten. Für die finiten FFD-Räume werden die Kontrollpunkte als Freiheitsgrade bezeichnet.

Die B-Splines haben weitere Eigenschaften, die günstig für Approximation und Interpolation sind. Insbesondere sei die Eigenschaft der lokalen Basis hier aufgeführt.

Theorem 3.4. *Sei T eine einfache nicht entartete Knotenfolge, dann bilden die B-Splines*

$$b_1^k, \dots, b_m^k \quad (3.80)$$

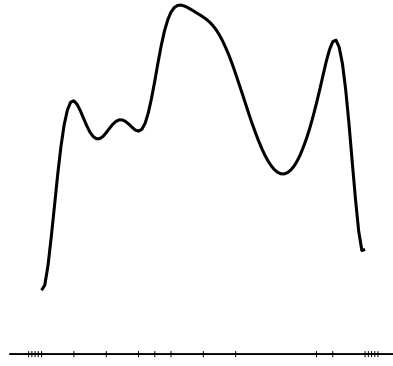


Abbildung 3.14: Spline

eine lokale Basis des $S_{k,T}(D)$, das heißt

$$\sum_j b_j^k(t) p_j \equiv 0 \quad \text{für} \quad t \in [\tau_l, \tau_{l+1}) \quad (3.81)$$

gilt genau dann, wenn

$$p_j = 0 \quad \text{für} \quad j \in [l - k + 1, \dots, l] \quad (3.82)$$

gilt.

Im Gegensatz zu anderen Basen, wie den abgebrochenen Potenzen, erlauben die B-Splines eine einfache Identifikation der Kontrollpunkte mit dem beeinflussten Gebiet. Als weitere Eigenschaften seien die nicht negative Partition der Eins, also

$$\sum_j b_j^k(t) \equiv 1 \quad (3.83)$$

für alle $t \in D(T)$ und $b_j^k \geq 0$, sowie die affine Invarianz und die konvexe-Hülle-Eigenschaft der B-Splines genannt.

Um die B-Splines bei der FFD-Optimierung zu nutzen, benötigt man eine B-Spline-Basis auf Ω . Es bietet sich die folgende Wahl von Knotenvektoren $T_i, 1 \leq i \leq d$ an. Sei Ω gegeben durch $[\alpha, \beta] = \Pi_{i=1}^d [\alpha_i, \beta_i]$, dann kann man für eine B-Spline-Basis der Ordnung k die Knotenvektoren

$$T_i = \alpha_i \# k, \tau_1^i, \dots, \tau_{m_i}^i, \beta_i \# k \quad (3.84)$$

wählen, wobei

$$\tau \# k := \underbrace{\tau, \dots, \tau}_{k \text{ mal}} \quad (3.85)$$

gilt. Für τ_j^i eignet sich der allgemeine äquidistante Ansatz

$$\tau_j^i := \frac{j(\beta_i - \alpha_i)}{m_i + 1} + \alpha_i. \quad (3.86)$$

Wir definieren weiter, dass ein B-Spline, der nur von der i -ten Komponente von x abhängig ist, den Knotenvektor T_i verwendet. Diese B-Splines werden als

$$b_{j,i}^k(x) := b_j^k(x_i), x_i \in [\alpha_i, \beta_i] \quad (3.87)$$

geschrieben. Die B-Splines einer Richtungskomponente werden mit

$$\widehat{b}_i^k(x) := (b_{1,i}^k, \dots, b_{m_i,i}^k) \quad (3.88)$$

bezeichnet. Dann erhält man die folgende B-Spline-Basis:

Definition 3.22. Die reine B-Spline Basis B_S^k der Ordnung k über Ω mit den dazugehörigen Knotenvektoren T_i ist gegeben durch

$$B_S^k := \begin{pmatrix} \widehat{b}_1^k, \dots, \widehat{b}_d^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \widehat{b}_1^k, \dots, \widehat{b}_d^k \end{pmatrix} \quad (3.89)$$

mit $x \in \Omega$. Eine reine B-Spline-FFD-Funktion φ_A ist dann gegeben durch

$$\varphi_A(x) := \mathcal{I} + B_S^k A \quad (3.90)$$

mit $A \in \mathbb{R}^n$, $n = \dim(B_S^k)$.

Diese Basis ist keine Basis des allgemeinen polinomialen FFD-Raumes, da multivariate polynomiale Anteile nicht vorhanden sind. Um auch diese Funktionen darstellen zu können, benötigt man Tensorprodukt-B-Splines (TBS).

Bemerkung 3.11. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden die Tensorprodukt-B-Splines und damit auch die Tensorprodukt-B-Spline-Basis für finite FFD-Räume, nur für die Dimension $d = 2$ betrachtet. Die Vorgehensweise zur Konstruktion von Basen höherer Dimension ist analog.

Die Tensorprodukt-B-Splines sind stückweise bivariate Polynome. Die Konstruktionsidee ist wie folgt: Man legt ein Gitter, das durch die Knotenvektoren T^σ und T^τ definiert ist, über das Definitionsgebiet. Danach werden B-Splines entlang einer der beiden Knotenvektoren und der Kontrollpunkte ausgewertet. Diese B-Splines bilden die Kontrollpunkte für die Auswertung der B-Splines in der zweiten Raumrichtung. Die Abbildungen 3.15 geben lineare bzw. quadratische Tensorprodukt-B-Splines an.

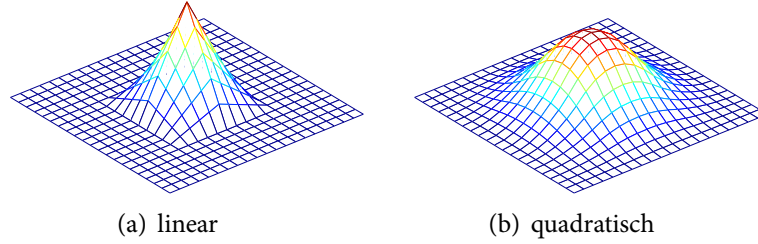


Abbildung 3.15: Tensorprodukt-B-Splines

Definition 3.23. Gegeben seien zwei Knotenfolgen

$$T^\tau : \tau_1, \dots, \tau_{m+k} \quad (3.91)$$

$$T^\sigma : \sigma_1, \dots, \sigma_{\tilde{m}+\tilde{k}} \quad (3.92)$$

für Splines der Ordnung k bzw. \tilde{k} . Ein bivariater Tensorprodukt-B-Spline der Ordnung (k, \tilde{k}) ist definiert durch

$$b_{j,l}^{k,\tilde{k}}(x_1, x_2) := b_j^k(x_1) b_l^{\tilde{k}}(x_2). \quad (3.93)$$

Das Definitionsgebiet ist

$$D(T^\sigma, T^\tau) = D(T^\sigma) \times D(T^\tau). \quad (3.94)$$

Die Eigenschaften der B-Splines übertragen sich auf die Tensorprodukte, das heißt, auch sie haben einen lokalen Träger und sie bilden eine linear unabhängige positive Partition der Eins. Der Träger eines solchen B-Splines ist gegeben durch

$$\text{supp } b_{j,l}^{k,\tilde{k}} = [\sigma_j, \sigma_{j+\tilde{k}}] \times [\tau_l, \tau_{l+k}]. \quad (3.95)$$

Definition 3.24. Ein FFD-Tensorproduktspline in B-Splineform ist durch

$$f(x_1, x_2) = \mathcal{I} + \sum_{j,l} b_{j,l}^{k,\bar{k}}(x_1, x_2) p_{j,l} \quad (3.96)$$

mit $(x_1, x_2) \in D(T^\sigma, T^\tau)$ und Kontrollpunkten $p_{j,l}$ gegeben.

Abbildung 3.16 ist ein Beispiel für einen Tensorprodukt-B-Spline.

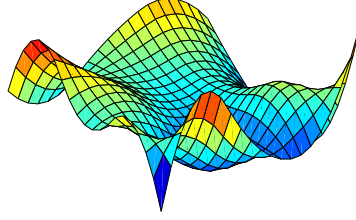


Abbildung 3.16: Tensorprodukt-B-Spline

Ausgehend von den Tensorprodukt-B-Splines kann man nun die B-Spline-Basis eines finiten FFD-Raumes angeben, in der der allgemeine Polynomraum enthalten ist. Wie in Bemerkung 3.11 erwähnt, wird nur die Basis für $d = 2$ angegeben. Mit den gleichen Konventionen wie für die reine B-Spline-Basis erhält man die folgende Basis aus Tensorprodukt-B-Splines.

Definition 3.25. Die multivariate B-Spline Basis B_{TBS}^k der Ordnung k über $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ mit den zugehörigen Knotenvektoren T^σ, T^τ ist gegeben durch

$$B_{TBS}^k := \begin{pmatrix} b_{1,1}^{k,\bar{k}} & \dots & b_{i,j}^{k,\bar{k}} & \dots & b_{m+k,\tilde{m}+k}^{k,\bar{k}} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{1,1}^{k,\bar{k}} & \dots & b_{i,j}^{k,\bar{k}} & \dots & b_{m+k,\tilde{m}+k}^{k,\bar{k}} \end{pmatrix} \quad (3.97)$$

mit $x \in \Omega$. Eine allgemeine B-Spline-FFD-Funktion φ_A ist dann gegeben durch

$$\varphi_A(x) := \mathcal{I} + B_{TBS}^k A \quad (3.98)$$

mit $A \in \mathbb{R}^n$, $n = \dim(B_{TBS}^n)$.

Wählt man äquidistante Knoten in beide Richtungen und k -fache Knoten zu Beginn und am Ende des Definitionsgebietes und keine Knoten im Inneren, so erhält man eine zu der multivariaten Polynombasis äquivalente B-Splinebasis. Deswegen kann man direkt folgern, dass der Raum der B-Splines, der durch die multivariate bzw. reine B-Spline Basis der Ordnung k aufgespannt wird, k -flexibel ist. Weiter sind die B-Spline-Räume der Ordnung k (δ, k) -flexibel mit $\delta > \max_j |s_j^k|$, dies folgt aus der lokalen Basiseigenschaft der B-Splines. Abschließend bleibt zu bemerken, dass m und \tilde{m} nicht notwendigerweise gleich sein müssen.

3.3 ITERATIVE FFD

Nachdem nun ausführlich lokale und globale FFD-Funktionen und eine Auswahl von dazu passenden Basen behandelt wurden, soll im Folgenden die mehrfache Anwendung von FFD-Funktionen auf ein zulässiges geometrisches Objekt betrachtet werden. Dies ist in der FFD-Optimierung wichtig, da im Allgemeinen mit einem einzigen FFD-Schritt die Lösung des Optimierungsproblems nicht erreicht werden kann.

Für die Hintereinanderausführung von FFD-Funktionen kann das folgende Lemma angegeben werden.

Lemma 3.12. *Seien ψ_1 und ψ_2 zwei global zulässige FFD-Funktionen, dann ist die Hintereinanderausführung $\psi_2 \circ \psi_1$ ebenfalls eine global zulässige FFD-Funktion.*

Beweis. Sei $u \in \mathcal{Z}$ ein zulässiges geometrisches Objekt. Dann ist $\psi_1(u) \in \mathcal{Z}$, da ψ_1 eine globale zulässige FFD-Funktion ist. Da ψ_2 ebenfalls zulässige geometrische Objekte auf zulässige geometrische Objekte abbildet, gilt $\psi_2(\psi_1(u)) \in \mathcal{Z}$. \square

Das Lemma 3.12 gilt nur für *global* zulässige FFD-Funktionen. Um eine iterative lokal zulässige FFD-Funktion zu erhalten, müsste die Zulässigkeit zu dem bereits deformierten Objekt $\psi_1(u)$ betrachtet werden. Es wäre also notwendig $\psi_1 \in \Psi_{\mathcal{Z},u}$ und $\psi_2 \in \Psi_{\mathcal{Z},\psi_1(u)}$ für ein gegebenes $u \in \mathcal{Z}$ zu wählen. Das heißt, bei jedem Iterationsschritt wäre es notwendig, die Menge der lokal zulässigen FFD-Funktionen $\Psi_{\mathcal{Z},u}$ neu zu bestimmen. Bei der Iteration mit global zulässigen FFD-Funktionen muss die Menge der zulässigen FFD-Funktionen nur einmal, zu Beginn der Iteration, bestimmt werden. Aus diesem Grund werden in diesem Kapitel nur global zulässige FFD-Funktionen betrachtet.

Definition 3.26. Sei \mathcal{M} eine Menge von FFD-Funktionen, dann ist die Menge $[r]\mathcal{M}$ der $[r]$ -mal iterierten FFD-Funktionen gegeben durch

$$[r]\mathcal{M} := \{\psi_r \circ \cdots \circ \psi_1, \psi_i \in \mathcal{M}, 1 \leq i \leq r\}. \quad (3.99)$$

Eine mehrfache Anwendung einer bestimmten FFD-Funktion ψ wird durch

$$[r]\psi := \underbrace{\psi \circ \cdots \circ \psi}_{r \text{ mal}} \quad (3.100)$$

ausgedrückt.

3.3.1 ITERATIVE FINITE FFD

Bei den polynomialen FFD-Funktionen ist die iterative Anwendung ein probates Mittel, um eine größere Menge von FFD-Funktionen zur Lösung des Optimierungsproblems zu erhalten. Grundlage dieser Vorgehensweise ist, dass bei iterativer Anwendung von quadratischen oder höherdimensionalen FFD-Funktionen durch jede Hintereinanderausführung die FFD-Räume größer werden.

Theorem 3.5. Sei Φ_k ein polynomialer FFD-Raum der Ordnung $k \geq 3$. Dann gilt für die Menge der 2-mal iterierten FFD-Funktionen $[2]\Phi_k$, dass sie eine echte Obermenge von Φ_k ist, also

$$\Phi_k \subsetneq [2]\Phi_k. \quad (3.101)$$

Beweis. Sei Φ_k ein Raum von polynomialen FFD-Funktionen der Ordnung $k \geq 3$. Dann gibt es eine FFD-Funktion $\varphi_A \in \Phi_2 \subseteq \Phi_k$, die quadratisch in x ist. Dann ist die Hintereinanderausführung von $[2]\varphi_A := \varphi_A \circ \varphi_A$ quartisch in x , hat also Ordnung fünf. Falls $[r]\varphi_A \in \Phi_k$ gilt, dann ist $[2r]\varphi_A := [r]\varphi_A \circ [r]\varphi_A$ ebenfalls in $[2]\Phi_k$ enthalten. Da in Φ_k nur Polynome der Ordnung $k + 1$ enthalten sein können, gibt es ein maximales $i \leq k$ mit $[2^i r]\varphi_A \in \Phi_k$. Dann gilt $[2 \cdot 2^i r]\varphi_A \notin \Phi_k$ aber $[2 \cdot 2^i r]\varphi_A \in [2]\Phi_k$. \square

Für lineare oder konstante FFD-Funktionen gilt der Satz nicht. Denn bei der Hintereinanderausführung von linearen oder konstanten FFD-Funktionen kommt keine Vergrößerung des finiten FFD-Raumes zustande. Es gilt

$$[r]\Phi_k(\Omega) = [r+1]\Phi_k(\Omega) \quad (3.102)$$

für $k = 0, 1$, da für $k = 1$

$$\varphi_{A_1} \circ \varphi_{A_2} = \mathcal{I} + BA_1 + BA_2 = \mathcal{I} + BA^* \quad (3.103)$$

mit $A^* := A_1 + A_2$ und für $k = 2$ wegen der Linearität von B

$$\varphi_{A_1} \circ \varphi_{A_2} = \mathcal{I} + BA_1 + B(\mathcal{I} + BA_1)A_2 = \mathcal{I} + B\tilde{A} \quad (3.104)$$

gilt. Aus diesem Grund ist es nicht sinnvoll, mehr als einen linearen FFD-Schritt in einer Optimierung zu machen. Dies ändert sich, wenn raummodifizierte Basen betrachtet werden.

Es wurde gezeigt, dass sich der Raum der zur Verfügung stehenden FFD-Funktionen mit jedem Iterationsschritt vergrößert. Es stellt sich die Frage, wie groß dieser Zugewinn ist. Ausgehend von numerischen Resultaten lässt sich die folgende Vermutung formulieren.

Vermutung 3.6. Sei $\Phi_k(\Omega)$, $\Omega = \mathbb{R}$ ein polynomialer FFD-Raum mit Polynomen der Ordnung $k \geq 3$, dann gilt

$$\Phi_{k+1}(\Omega) \not\subset [r]\Phi_k(\Omega) \quad (3.105)$$

für alle $r \geq 2$.

In Abbildung 3.17 ist eine Übersicht über die iterierten FFD-Räume angegeben.

Es stellt sich die Frage, ob für genügend oft iterierte FFD-Funktionen eines FFD-Raumes die dabei entstehende Menge dicht in dem Raum aller FFD-Funktionen liegt. Ob also

$$\overline{\bigcup_r [r]\Phi_k(\Omega)} = \Psi(\Omega) \quad (3.106)$$

gilt.

Bemerkung 3.12. Obwohl dieses Problem (3.106) an dieser Stelle nicht beantwortet werden kann, wurde mit Lemma 3.5 aufgezeigt, dass es sinnvoll ist, iterierte FFD-Räume zu betrachten. Insbesondere konnte in der Praxis an mehreren Beispielen gezeigt werden, dass sich die iterierten FFD-Funktionen zur Optimierung eignen.

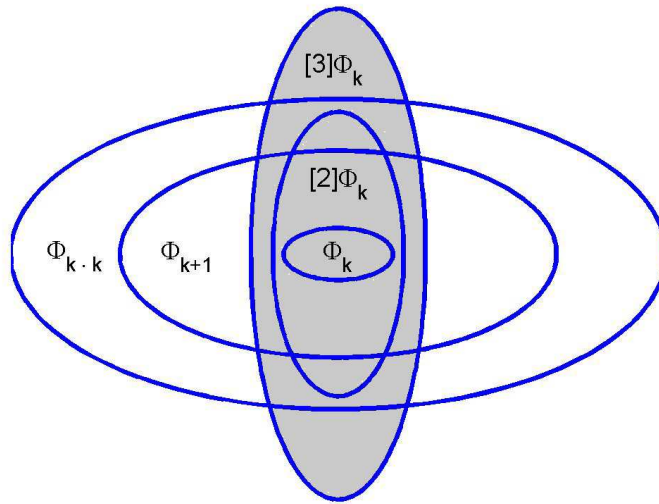


Abbildung 3.17: iterative FFD-Räume

4 FFD MIT GEOMETRISCHEN RESTRIKTIONEN

In Kapitel 3.2 wurde die Flexibilität von finiten polynomialen FFD-Funktionen nur für nichtrestringierte Probleme gezeigt. Um nichtlineare restringierte Optimierungsprobleme mit der FFD-Optimierung zu lösen, ist es aber wichtig, sich mit der Flexibilität der FFD-Funktionen bezüglich eines restringierten Problems zu beschäftigen. Zwar ist die Definition der Flexibilität so gewählt, dass sie auch auf restringierte Probleme angewendet werden kann, aber die bis jetzt behandelten Mengen $\mathcal{M}(B, \mathcal{A})$ von FFD-Funktionen wurden hinsichtlich ihrer Flexibilität nur für nicht restringierte Koeffizientenmengen ($\mathcal{A} = \mathbb{R}^d$) betrachtet, bzw. die Restriktionen wurden durch eine Beschränkung der zulässigen Koeffizientenmenge \mathcal{A} erreicht. Dies führte zu einer komplexen oder trivialen Struktur von \mathcal{A} .

Beispiel 4.1. Sei \mathcal{M} eine Menge von k -flexiblen FFD-Funktionen mit $\mathcal{Z} = \mathfrak{P}(\Omega)$. Zu \mathcal{Z} soll nun eine Restriktion hinzugefügt werden. Sei $X \subset \Omega$ eine offene Menge, dann betrachtet man nur noch geometrische Objekte, in denen X nicht enthalten ist. Sollen nun die geometrische Restriktion nur über die zulässige Koeffizientenmenge realisiert werden, so erhält man das folgende Problem. Falls B eine polynomiale FFD-Basis ist und $\mathcal{M} \subseteq \Psi_{\mathcal{Z}}$ gilt, so führt dies zu $\mathcal{A} := \{A_{\mathcal{I}}\}$. Damit wäre die Menge der FFD-Funktionen aber nicht mehr k -flexibel, es ist also nötig, die Restriktion in die Basis zu integrieren.

In diesem Kapitel soll nun die FFD-Optimierung auf geometrisch restringierte Probleme verallgemeinert werden. Das Ziel soll dabei sein, die FFD-Optimierung auf restringierten Räumen nicht durch restringierte Optimierungsverfahren zu lösen, sondern die Restriktionen in die Basen der FFD-Räume zu integrieren, so dass nichtrestringierte Optimierungsverfahren verwendet werden können. Um die Restriktionen in die Basen zu integrieren, können *Raummodifikationen* verwendet werden. Durch eine Raummodifikation E werden die

Basis B und die zulässige Koeffizientenmenge \mathcal{A} durch eine modifizierte Basis \tilde{B} und eine modifizierte Koeffizientenmenge $\tilde{\mathcal{A}}$ ersetzt. Raummodifikationen sind geeignet, wenn die modifizierte Menge von FFD-Funktionen bezüglich der neuen Restriktionen global zulässig sind.

Eine Raummodifikation ist besonders gut geeignet, wenn damit die zulässige Menge von Freiheitsgraden \mathcal{A} auf eine einfache Struktur erweitert wird und die Flexibilität des Ansatzraumes erhalten bleibt. Eine besonders günstige Struktur ist ein konvexes \mathcal{A} , da dieses in vielen Optimierungsalgorithmen zu sehr guten Konvergenzergebnissen führt. Betrachtet man die Menge aller zulässigen Freiheitsgrade, die geometrische Restriktionen realisieren, so ist diese Menge im Allgemeinen nicht konvex. Wenn sie durch die Modifikation der Basis konvex wird, so hat man die Menge der zulässigen Freiheitsgrade erweitert. Aus diesem Grund werden Raummodifikationen in diesem Zusammenhang als *Erweiterungsoperatoren* bezeichnet.

Ausgehend von dieser Vorüberlegung wird eine Raummodifikation wie folgt definiert.

Definition 4.1. Sei $B \subseteq \Psi(\Omega)$ eine Basis eines finiten FFD-Raumes, $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ die Menge der zulässigen Freiheitsgrade und $\mathcal{Z} = \mathfrak{P}(\Omega)$. Seien weiter g, h Nebenbedingungen und $\mathcal{Z}^* := \{u \in \mathcal{Z} \mid g(u) \geq 0, h(u) = 0\}$. Eine Raummodifikation $E_{g,h}$ zu den Restriktionen g, h ist gegeben durch

$$E_{g,h} : \mathfrak{P}(\Psi(\Omega)) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{P}(\Psi(\Omega)) \times \mathbb{R}^{\tilde{n}} \quad (4.1)$$

$$E_{g,h} : (B, \mathcal{A}) \mapsto (\tilde{B}, \tilde{\mathcal{A}}) \quad (4.2)$$

für die

$$\mathcal{M}(E_{g,h}(B, \mathcal{A})) \subseteq \Psi_{\mathcal{Z}^*}(\Omega) \quad (4.3)$$

gilt.

Bemerkung 4.1. Auf den ersten Blick scheint es nicht sinnvoll zu sein, die Dimension des Optimierungsproblems zu erhöhen ($n < \tilde{n}$), denn eine solche Erhöhung führt zu einem höherdimensionalen Optimierungsproblem. Allerdings kann diese Erhöhung zu einem nicht restringierten Optimierungsproblem führen, welches in den meisten Fällen effizienter zu lösen ist als das restringierte. Trotzdem soll versucht werden, die Anzahl der Freiheitsgrade möglichst gering zu halten.

Als nächstes soll die Wirkung von solchen Raummodifikationen auf die Flexibilität von Mengen betrachtet werden. Sei $\mathcal{M}(B, \mathcal{A}) \subseteq \Psi_{\mathcal{Z}}(\Omega)$ eine Menge von finiten global zulässigen FFD-Funktionen für $\mathcal{Z} = \mathfrak{P}(\Omega)$. Weiter seien g und h Restriktionen und \mathcal{Z}^* die Menge von zulässigen geometrischen Objekten. Eine sinnvolle Raummodifikation $E_{g,h}$ der Basis B und der zulässigen Koeffizientenmenge \mathcal{A} bezüglich der neuen Restriktionen g und h ist gegeben, wenn die durch die Modifikation erhaltene Menge $\mathcal{M}^* := \mathcal{M}(\tilde{B}, \tilde{\mathcal{A}})$ von FFD-Funktionen genauso flexibel bezüglich der neuen Restriktionen ist wie die alte Menge $\mathcal{M}(B, \mathcal{A})$. Wir fassen die Beobachtungen in einer Definition zusammen.

Definition 4.2. Sei $\mathcal{Z} = \mathfrak{P}(\Omega)$ und $E_{g,h}$ sei eine Raummodifikation von (B, \mathcal{A}) zu den Restriktionen g, h . Weiter sei $(\tilde{B}, \tilde{\mathcal{A}}) := E_{g,h}(B, \mathcal{A})$. Die Raummodifikation $E_{g,h}$ heißt

- flexibilitätserschaltend, falls

$$\text{flex}(\mathcal{M}(B, \mathcal{A})) \leq \text{flex}(\mathcal{M}(E_{g,h}(B, \mathcal{A}))) \quad (4.4)$$

gilt.

- konvex, falls $\tilde{\mathcal{A}}$ konvex ist.

Abschließend soll noch eine weitere Eigenschaft von Raummodifikationen betrachtet werden, die man benötigt, um lokal injektive Raummodifikationen zu erhalten. Sei $J_i(x)$ die Jacobi-Matrix zu einer stetig differenzierbaren Basisfunktion b_i der Basis B . Analog dazu bezeichne $J_j^E(x)$ die Jacobi Matrix zu der mit $E_{g,h}$ modifizierten Basis \tilde{B} . Die Dimension von B sei m_B und die Dimension der erweiterten Basis sei $m_{\tilde{B}}$.

Definition 4.3. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt. Eine Raummodifikation $E_{g,h}$ von (B, \mathcal{A}) zu den Restriktionen g, h heißt normiert, falls

$$\max_{b_i \in B} \|b_i\|_{\infty, \Omega} \geq \max_{b_j \in \tilde{B}} \|b_j\|_{\infty, \Omega} \quad (4.5)$$

und

$$\max_{b_i \in B} \|J_i\|_{\infty, \Omega} \geq \max_{b_j \in \tilde{B}} \|J_j^E\|_{\infty, \Omega} \quad (4.6)$$

für die Basen und

$$m_{\tilde{B}} \max_{\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}} \|\tilde{A}\|_{\infty} \leq m_B \max_{A \in \mathcal{A}} \|A\|_{\infty}, \quad (4.7)$$

mit $m_{\tilde{B}} := \dim(\tilde{B})$, $m_B := \dim(B)$, für die Menge der zulässigen Freiheitsgrade gilt.

In den folgenden Kapiteln werden hauptsächlich solche Raummodifikationen betrachtet, die konvex flexibilitäts-erhaltend und normiert sind. Aus diesem Grund werden solche Raummodifikationen im Folgenden speziell bezeichnet.

Definition 4.4. Eine Raummodifikation, die konvex, normiert und flexibilitäts-erhaltend ist, wird als Erweiterungsoperator bezeichnet.

Zu Fixierungen und Hindernissen können Erweiterungsoperatoren angegeben werden.

Bemerkung 4.2. In manchen Fällen, wie zum Beispiel bei Volumenrestriktionen, können nur Raummodifikationen und keine Erweiterungsoperatoren angegeben werden. Für Restriktionen, die keinen geometrischen Hintergrund haben oder sich nicht durch eine Betrachtung in einer höheren Dimension geometrisch formulieren lassen, ist es oft schwer, Erweiterungsoperatoren anzugeben. Im ungünstigsten Fall ist die Raummodifikation nur eine Modifikation der Menge der zulässigen Freiheitsgrade und erhält nicht die Flexibilität.

Im Folgenden wird eine Auswahl von Restriktionen und falls möglich ein dazugehöriger Erweiterungsoperator angegeben. Ansonsten wird eine Raummodifikation angegeben. Dabei wird zwischen *lokalen* und *globalen* Restriktionen unterschieden. Bei globalen Restriktionen g, h erhält man meist eine Raummodifikation $(\tilde{B}, \tilde{\mathcal{A}}) := E_{g,h}(B, \mathcal{A})$ mit

$$\tilde{B} := B \quad (4.8)$$

und bei lokalen normierten Restriktionen gilt für die Raummodifikation im günstigsten Fall

$$\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}. \quad (4.9)$$

Zu lokalen Restriktionen gehören demzufolge konvexe Raummodifikationen, globale Raummodifikationen hingegen führen zu keiner Dimensionserhöhung der Basis.

4.1 GLOBALE RESTRIKTIONEN

Unter globalen Restriktionen versteht man Restriktionen, die nicht auf ein Teilgebiet von Ω beschränkt sind.

Beispiel 4.2. Sei u ein geometrisches Objekt und V das dem geometrischen Objekt zugeordnete Volumen. Eine globale Restriktion an u wäre eine untere Schranke c_V für das Volumen $V(u)$, also $V(u) \geq c_V$. Falls $V(u) > c_V$ ist, so ist die Restriktion nicht aktiv und alle Punkte von u sind bezüglich dieser Restriktion restriktionsfrei. Ist die Restriktion aber aktiv, also $V(u) = c_V$, so sind nur Punkte von u restriktionsfrei, von denen nicht das Volumen abhängt.

Beispiel 4.3. Globale Restriktionen können auch mit der Gestalt des geometrischen Objekts in Verbindung stehen. So wird in vielen Anwendungen verlangt, dass das zu optimierende geometrische Objekt nur homöomorph deformiert wird. Betrachtet man zum Beispiel eine Tragfläche eines Flugzeugs, so soll während der Optimierung kein Loch innerhalb der Tragfläche entstehen. Es sind also nur solche Deformationen von Interesse, die die topologische Struktur des geometrischen Objekts erhalten.

Die wichtigste globale Restriktion ist die Erhaltung der topologischen Struktur eines geometrischen Objekts. Dies wird durch die Injektivität von ψ auf Ω sichergestellt. Mit Hilfe der Injektivitätsbedingungen können aber erst verschiedene lokale Restriktionen wie die Hindernisrestriktionen in die Basis integriert werden. Im Weiteren werden die Volumenrestriktionen und die Einschränkung auf homotope FFD-Funktionen betrachtet.

4.1.1 INJEKTIVITÄT

Um injektive FFD-Funktionen zu erhalten, wurden in Kapitel 3.1.3 mehrere Lemmata angegeben. Nach Lemma 3.7 genügt es, lokal injektive Funktionen zu betrachten, die auf dem Rand von Ω fixiert werden. Deswegen wird als erstes eine Raummodifikation angegeben, die sicherstellt, dass die erhaltene Menge von FFD-Funktionen lokal injektiv ist. Dafür betrachtet man nicht die Jacobimatrix von φ_A , sondern die Jacobimatrix J_i der einzelnen Basisfunktionen b_i .

Lemma 4.1. Sei $\varphi_A \in \mathcal{M}(B, \mathcal{A})$, $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine zulässige FFD-Funktion, Ω konvex und K eine Konstante mit $\|J_i(x)\|_\infty < K$ für alle $x \in \Omega$ und alle i . Sei

$$\mathcal{A}_{inj} := \{A \in \mathcal{A} \mid \|A\|_\infty < (nK)^{-1}\}, \quad (4.10)$$

dann ist jedes $\varphi_A \in \mathcal{M}(B, \mathcal{A}_{inj})$ global injektiv auf Ω .

Beweis. Sei $A \in \mathcal{A}_{inj}$ und Ω konvex. Nach Lemma 3.8 ist φ_A global injektiv falls

$$\frac{J_{\varphi_A} + J_{\varphi_A}^T}{2} \quad (4.11)$$

positive definit ist. Es gilt

$$\frac{J_{\varphi_A} + J_{\varphi_A}^T}{2} = \mathcal{I} + \frac{J_{BA} + J_{BA}^T}{2}. \quad (4.12)$$

Weiter folgt, dass

$$\|J_{BA}\|_{\infty, \Omega} \leq n \max_i \|J_i\|_{\infty, \Omega} \max_j |a_j| \quad (4.13)$$

und nach Voraussetzung

$$n \max_i \|J_i\|_{\infty, \Omega} \max_j |a_j| < nK(nK)^{-1} = 1 \quad (4.14)$$

gilt. Ebenso erhält man $\|J_{BA}^T\|_{\infty, \Omega} < 1$ und damit

$$\left\| \frac{J_{BA} + J_{BA}^T}{2} \right\|_{\infty, \Omega} < 1. \quad (4.15)$$

Folglich ist die symmetrisierte Jacobimatrix (4.11) strikt diagonaldominant mit positiven Einträgen auf der Diagonalen und damit positive Definit.

□

Die Beschränkung der Jacobimatrix führt aber zu einer starken Schrittweitenbeschränkung (siehe Kapitel 6) in der FFD-Optimierung, denn die Größe der Jacobimatrix hängt von den zulässigen Freiheitsgraden ab. Das nächste Beispiel zeigt, wie stark die zulässigen Freiheitsgrade eingeschränkt werden müssen, um die globale Injektivität zu erreichen.

Beispiel 4.4. Betrachtet man die reine FFD-Polynombasis im \mathbb{R}^3 vom Grad 2 und $\Omega = [0, 1]^3$. Dann sind die Jacobimatrizen J_i gegeben durch

$$J_1 = 0, J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, J_5 = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, J_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Damit ist

$$K = \max_{x \in \Omega} \{|2x_1|, |2x_2|, |2x_3|\} \quad (4.17)$$

und für $\Omega = [-1, 1]^3$ gilt $K = 2$. Die Menge \mathcal{A}_{inj} ist dann gegeben durch alle $A \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\|A\|_\infty < \frac{1}{2 \cdot 21} = \frac{1}{42}. \quad (4.18)$$

Damit sind nur eine sehr kleine Deformationen bei FFD-Schritten sicher global injektiv. Da $\max_{A \in \mathcal{A}_{inj}} \|A\|_\infty > 0$ gilt, ist aber eine Mindestschrittweite garantiert.

Wir geben zu Lemma 4.1 eine Raummodifikation E_{inj} an.

Lemma 4.2. Die Raummodifikation E_{inj} zur globalen Injektivität ist gegeben durch

$$E_{inj}(B, \mathcal{A}) := (B, \mathcal{A}_{inj} \cap \mathcal{A}) \quad (4.19)$$

mit $K := \max_i \|J_i(x)\|_{\infty, \Omega}$. Die Raummodifikation ist ein Erweiterungsoperator.

Beweis. Nach Lemma 4.1 sind alle $\varphi_A \in \mathcal{M}(B, \mathcal{A}_{inj})$ global injektiv. Der Nachweis der Normiertheit und der Konvexität ist trivial, der Nachweis der Flexibilität folgt aus der Linearität von φ_A in A . \square

4.1.2 VOLUMEN

Die volumenerhaltenden FFD-Verfahren kommen z.B. in der Medizin, bei Muskelmodellen und bei Körpermodellen zur Anwendung. Aber auch zur Modellierung von 3-dimensionalen Objekten ist es oft sinnvoll, Volumenerhaltende Verfahren einzusetzen. Änderungen des Volumens für geometrische Objekte, denen ein Volumen zugeordnet werden kann, können über die Menge der zulässigen Freiheitsgrade \mathcal{A} gesteuert werden.

Sei im Folgenden $u \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ eine messbare Menge, der ein Volumen

$$V: u \mapsto \mathbb{R} \quad (4.20)$$

zugeordnet werden kann. Wird nun auf Ω und damit auch auf das geometrische Objekt u eine FFD-Deformation angewandt, so kann sich das Volumen $V(u)$ ändern. Die Vermutung liegt nahe, dass man anhand der verwendeten Freiheitsgrade A das neue Volumen $V(\varphi_A(u))$ bestimmen kann.

Theorem 4.1. Sei u ein geometrisches Objekt, $u \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, mit einem Volumen $V(u)$ und sei $J_A(x)$ die Jacobi-Matrix von φ_A im Punkt $x \in \Omega$, dann ist das Volumen des deformierten geometrischen Objekts $\varphi_A(u)$ gegeben durch

$$V(\varphi_A(u)) = V(u) \iiint_u |J_A(x)| dx_1 dx_2 dx_3. \quad (4.21)$$

Beweis. Das Volumen von u ist gegeben durch

$$\iiint_u 1 dx_1 dx_2 dx_3. \quad (4.22)$$

Die FFD kann als Variablentransformation mit $\varphi_A = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ und

$$\tilde{x}_1 = \phi_1(x_1, x_2, x_3), \quad (4.23)$$

$$\tilde{x}_2 = \phi_2(x_1, x_2, x_3), \quad (4.24)$$

$$\tilde{x}_3 = \phi_3(x_1, x_2, x_3) \quad (4.25)$$

betrachtet werden. Dann erhält man

$$\iiint_{\varphi_A(u)} 1 d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2 d\tilde{x}_3 = \iiint_u |J_A(x)| dx_1 dx_2 dx_3. \quad (4.26)$$

□

Für $J_{\varphi_A}(x) \equiv 1$ bekommt man insbesondere eine FFD-Funktion, die das Volumen konstant lässt, also $V(u) = V(\varphi_A(u))$.

Beispiel 4.5. Für die reine Polynombasis der Ordnung 2 im \mathbb{R}^3 erhält man

$$J_A = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ a_6 & a_7 & a_8 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

und damit gilt $V(\varphi_A(u)) = V(u) \det(J_A)$. Die dazugehörige Raummodifikation ist gegeben durch

$$E_V(B, \mathcal{A}) := (B, \mathcal{A}_V) \quad (4.28)$$

mit $\mathcal{A}_V := \{A \in \mathcal{A} \mid \det(J_A(x)) \equiv_{\Omega} 1\}$.

4.1.3 HOMOTOPIE

Als letzte globale Restriktion wird die Homotopierestriktion betrachtet. Eine gegebene Menge finiter FFD-Funktionen $\mathcal{M}(B, \mathcal{A})$ soll zu einer Menge homotop zulässiger FFD-Funktionen modifiziert werden. Dafür betrachtet man die Menge der zulässigen Freiheitsgrade \mathcal{A} . Für diese gilt nach Voraussetzung $A_{\mathcal{I}} \in \mathcal{A}$. Falls \mathcal{A} aus mehreren Wegzusammenhangskomponenten besteht, so bezeichnet man die Wegzusammenhangskomponente in der $A_{\mathcal{I}}$ enthalten ist mit \mathcal{A}_0 .

Lemma 4.3. *Sei u ein zulässiges geometrisches Objekt und $\mathcal{M}(B, \mathcal{A})$ eine Menge von finiten global zulässigen FFD-Funktionen, dann ist die Raummodifikation E_{hom} zur Homotopienebenbedingung gegeben durch*

$$E_{\text{hom}}(B, \mathcal{A}) := (B, \mathcal{A}_0). \quad (4.29)$$

E_{hom} ist ein Erweiterungsoperator falls \mathcal{A}_0 konvex ist.

Beweis. Wir konstruieren die Homotopiefunktion H , mit $H(0, u) = u$ und $H(1, u) = \varphi_A(u)$. Da \mathcal{A}_0 nach Voraussetzung wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $s(t): [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $s(0) = 0$ und $s(1) = A_{\mathcal{I}}$ und $s(t) \in \mathcal{A}_0$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann ist die Homotopiefunktion gegeben durch $H(t, u) = \varphi_{s(t)}(u)$.

Der Nachweis der Flexibilität ist analog zu dem Nachweis der Flexibilität für den Erweiterungsoperator E_I . \square

Das Homotopieproblem lässt sich also darauf reduzieren, die Wegzusammenhangskomponente \mathcal{A}_0 zu bestimmen. Dies ist allerdings im Allgemeinen kein einfaches Problem. Um sicherzustellen, dass man einen Erweiterungsoperator erhält, kann man statt \mathcal{A}_0 eine konvexe Untermenge von \mathcal{A}_0 verwenden.

4.2 LOKALE RESTRIKTIONEN

Im Folgenden sollen lokale Restriktionen betrachtet werden. Lokale Restriktionen sind solche, die nicht den ganzen Raum Ω und auch nicht das gesamte geometrische Objekt u betreffen, sondern einen Teil von Ω . Typische lokale Restriktionen sind Hindernisse und Ankopplungen.

Zuerst werden Hindernisse betrachtet, dies sind fixierte Teilmengen von Ω , die nicht im geometrischen Objekt u enthalten sein dürfen. Danach werden Fixierungen von Teilen des geometrischen Objekts näher untersucht.

4.2.1 HINDERNISRESTRIKTIONEN

Ein Hindernis ist ein geometrisches Objekt $v \in \Omega$, welches sich unter den global zulässigen FFD-Funktionen nicht ändert und von dem zu optimierenden geometrischen Objekt nicht durchdrungen werden darf. Solche Hindernisrestriktionen kommen in der Praxis recht häufig vor und werden deswegen gesondert behandelt. Durch die Tatsache, dass die Restriktion nicht Teil des zu optimierenden geometrischen Objektes ist, sind diese Restriktionen einfach zu behandeln. Zuerst aber die Definition eines Hindernisses.

Definition 4.5. *Ein geometrisches Objekt $v \subseteq \Omega$ heißt Hindernis, falls*

$$v \cap u = \emptyset \quad (4.30)$$

für alle zulässigen geometrischen Objekte $u \subseteq \Omega$ gilt.

Bei der Formulierung des Optimierungsproblems wurden die Nebenbedingungen g, h eingeführt. Diese können verwendet werden, um die Hindernisrestriktionen dem Optimierungsproblem hinzuzufügen. Dies führt zu einem restringierten Optimierungsproblem, welches im Allgemeinen schwerer zu lösen ist. Auch ist es nötig, die Hindernisrestriktion durch Gleichungen und Ungleichungen zu beschreiben. Dies ist für komplexe geometrische Objekte unter Umständen sehr schwierig. Durch die Integration eines Hindernisses in die Basis ist es nicht nötig, Hindernisse durch Gleichungen und Ungleichungen zu formulieren.

Als nächstes werden einige Beispiele von Hindernisrestriktionen angegeben.

Beispiel 4.6. *Betrachtet man Beispiel 2.1, dann stellt das Innere W_I des Kreises W ein solches Hindernis dar. Denn W_I gehört nicht zu dem zu optimierenden geometrischen Objekt s und darf nicht durchdrungen werden. Somit ist es eine Hindernisrestriktion.*

Beispiel 4.7. *Sei das zu optimierende geometrische Objekt Teil eines Automotors. Dann existieren in der unmittelbaren Umgebung ebenfalls Teile des Autos, die die geometrische Struktur des betrachteten Objekts einschränken. So dürfen Leitungen oder Karosserieteile nicht von dem betrachteten geometrischen Objekt durchdrungen werden. Diese Teile sind somit Hindernisrestriktionen für das geometrische Objekt.*

Beispiel 4.8. Betrachten wir einen Luftballon, der mit Luft gefüllt ist und im Inneren des Luftballons sei ein Würfel aus Holz enthalten. Lässt man nun die Luft aus dem Luftballon entweichen, so zieht sich dieser aufgrund der Oberflächenspannung zusammen und legt sich um den Würfel. Der Würfel ist ein Hindernis für den Luftballon.

Um die Hindernisrestriktionen in den Raum der FFD-Funktionen zu integrieren, muss jede einzelne FFD-Funktion die Hindernisrestriktion einhalten. Dazu ist es notwendig, dass ein durch eine FFD-Funktion deformiertes zulässiges geometrisches Objekt u auch nach der Deformation zulässig ist. Dies ist gegeben, falls

$$\psi(u) \cap v = \emptyset \quad (4.31)$$

für alle $\psi \in \mathcal{M}$ und alle $u \in \mathcal{Z}$ gilt.

Für die iterierten FFD-Funktionen muss eine weitere Bedingung erfüllt werden, denn das Hindernis wird ebenfalls durch ψ deformiert und die Bedingung (4.31) genügt nicht, um

$$\psi(u) \cap \psi(v) = \emptyset \quad (4.32)$$

zu garantieren. Deswegen werden bei der Verwendung von Iterierten FFD-Funktionen solche FFD-Funktionen verwendet, für die die Bedingung (4.31) erfüllt ist und für die

$$\psi(v) = v \quad (4.33)$$

gilt. Falls alle $\psi \in \mathcal{M}$ die Bedingungen (4.31) und (4.33) einhalten, dann folgt, dass

$$\psi(u) \cap \psi(v) \stackrel{(4.33)}{=} \psi(u) \cap v \stackrel{(4.31)}{=} \emptyset \quad (4.34)$$

für alle $\psi \in \mathcal{M}$ gilt. Somit erfüllt jedes $\psi \in [r]\mathcal{M}, r \geq 1$ die Hindernisbedingung. Da die Optimierung mit FFD-Funktionen hauptsächlich mit iterierten FFD-Funktionen durchgeführt wird, werden nachstehend Raummodifikationen angegeben, die die Bedingungen (4.31) und (4.33) erfüllen.

Um die Bedingungen (4.31) und (4.33) zu erfüllen, kann eine Gewichtsfunktion w verwendet werden. Eine solche Gewichtsfunktion

$$w : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad (4.35)$$

gewichtet die Deformationen $\Delta\psi$ des Raumes, indem sie die zur Identität hinzugefügt Deformation skaliert, also

$$\psi := \mathcal{I} + w \cdot \Delta\psi. \quad (4.36)$$

Dabei soll sie für Punkte, die Gegenstand von Hindernisrestriktionen sind, sicherstellen, dass die Hindernisrestriktionen eingehalten werden.

Definition 4.6. Sei $0 < \gamma \leq 1$, $0 < \sigma$ mit $\gamma, \sigma \in \mathbb{R}$. Eine Funktion $w_{\gamma,\sigma}^k \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^d)$ heißt Gewichtsfunktion bezüglich eines Hindernisses v , falls

$$x \in v \Leftrightarrow w_{\gamma,\sigma}^k(x) = 0 \quad (4.37)$$

für alle $x \in \Omega$ gilt. Weitere Eigenschaften einer Gewichtsfunktion sind wie folgt benannt:

- Eine Gewichtsfunktion heißt Plateau-Gewichtsfunktion, falls

$$d(x, v) \geq \sigma \Rightarrow w_{\gamma,\sigma}^k(x) = \pm\gamma \quad (4.38)$$

mit $0 < \gamma \leq 1$ gilt.

- Eine Gewichtsfunktion heißt normierte Gewichtsfunktion bezüglich einer Basis B , falls

$$\|w_{\gamma,\sigma}^k\|_\infty \leq \frac{1}{2} \text{ und } \|\nabla w_{\gamma,\sigma}^k\| \leq \eta \quad (4.39)$$

mit

$$0 < \eta \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\max_i \|J_i\|_{\infty,\Omega}}{\max_j \|b_j\|_{\infty,\Omega}} \right) \quad (4.40)$$

gilt.

Durch die Eigenschaft $x \in \nu \Rightarrow w_{\gamma,\sigma}^k(x) = 0$, gegeben durch (4.37), wird sichergestellt, dass die Hindernisbedingung (4.33) erfüllt wird. Die Forderung $x \in \nu \Leftarrow w_{\gamma,\sigma}^k(x) = 0$ ist notwendig, damit die durch die Gewichtsfunktion modifizierte Menge von FFD-Funktionen ihre Flexibilität nicht verliert. Denn falls es einen Punkt $x \notin \nu$ gibt, für den $w(x) = 0$ gilt, so sind alle zulässigen FFD-Funktionen ψ in diesem Punkt gegeben durch $\psi(x) = x$ und damit ist die Menge dieser FFD-Funktionen nicht flexibel.

Die Bedingung (4.38) führt dazu, dass die Gewichtsfunktion nur in der Nähe des Hindernisses Einfluss auf die FFD-Funktionen hat. Für Hindernisrestriktionen wird im Allgemeinen $w_{\gamma,\sigma}^k(x) = \gamma$, falls $d(x, \nu) \geq \sigma$ gilt, verwendet. Mit Hilfe normierter Gewichtsfunktionen können normierte Raummodifikationen konstruiert werden.

Es werden k -mal stetig differenzierbare Funktionen betrachtet, da die Gewichtsfunktionen k -flexible Mengen von FFD-Funktionen erzeugen sollen. Dafür ist es notwendig, dass sie k -mal stetig differenzierbar sind.

Die Bedingung (4.31) ist durch die Definition der Gewichtsfunktion nicht erfüllt, sie kann durch eine Raummodifikation der gewichteten FFD-Funktionen, die injektive FFD-Funktionen erzeugt, erreicht werden. Eine Gewichtsfunktion, die die obengenannten Bedingungen erfüllt, ermöglicht damit, den Raum der FFD-Funktionen so zu modifizieren, dass alle FFD-Funktionen aus dem modifizierten Raum, selbst bei iterierter Anwendung, global zulässig bezüglich des Hindernisses sind.

Um eine normierte Plateau-Gewichtsfunktion zu konstruieren, wird im Folgenden eine Hilfsfunktion s_γ^k , die als Bezierkurve gegeben ist, verwendet. Die Bezierkurve ist über die Bernsteinpolynome b_i^k definiert, die wie folgt gegeben sind.

$$b_j^N = \binom{N}{j} t^j (1-t)^{N-j} \quad (4.41)$$

Die Bezierkurve $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ist dann gegeben durch

$$c(t) := \sum_j b_j^N(t) p_j \quad (4.42)$$

mit einem Punktevektor $P = [p_1, \dots, p_N]$. Für die zu konstruierende Hilfsfunktion $s_\gamma^k(t)$ wählt man

$$P = [0\#(k+1), \gamma\#(k+1)] \quad (4.43)$$

und erhält

$$s_\gamma^k(t) := \sum_j b_j^{2k+2}(t) p_j. \quad (4.44)$$

Es gilt $s_\gamma^k(0) = 0$ und $s_\gamma^k(1) = \gamma$. Für die erste bis k -te Ableitung von s_γ^k an den Stellen $t = 0$ und $t = 1$ gilt

$$\left. \frac{d^i}{dt^i} s_\gamma^k(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d^i}{dt^i} s_\gamma^k(t) \right|_{t=1} = 0 \quad (4.45)$$

für $1 \leq i \leq k$ und $|s'(t)| \leq 2\gamma(k+1)$. Zwei Beispiele für solche Bezierkurven sind in Abbildung 4.1 gegeben. Ausgehend von der Hilfsfunktion s_γ^k wird die Ge-

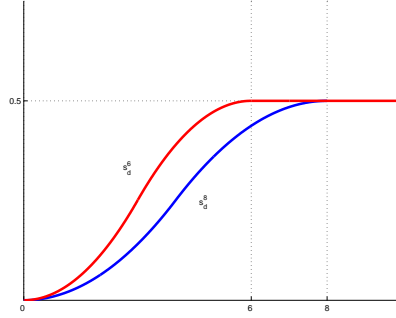


Abbildung 4.1: Bezierkurven s_1^1 und s_1^3

wichtsfunktion $w_{\gamma,\sigma}^k \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$ konstruiert. Sei $d(x, v_H)$ der minimale euklidische Abstand des Punktes x von dem affinen Untervektorraum v_H und $\sigma > 0$, dann konstruiert man $w_{\gamma,\sigma}^k$ wie folgt:

$$w_{\gamma,\sigma}^k(x) := \begin{cases} \gamma, & \text{falls } d(x, v_H) \geq \sigma \\ 0, & \text{falls } d(x, v_H) = 0 \\ s_\gamma^k(\sigma^{-1}d(x, v_H)^2), & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.46)$$

mit

$$\gamma := \min \left\{ \frac{1}{8(k+1)\sigma} \left(\frac{\max_i \|J_i\|_{\infty,\Omega}}{\max_j \|b_j\|_{\infty,\Omega}} \right), \frac{1}{2} \right\} \quad (4.47)$$

bei bekanntem B und σ . Die b_j in der Gleichung (4.47) sind die einzelnen Basisfunktionen aus B .

Bemerkung 4.3. Für Hindernisse, die aus affinen Untervektorräumen bestehen, kann $\sigma = 1$ gewählt werden. Bei anderen Hindernissen ist es unter Umständen notwendig, σ abhängig von der maximalen Krümmung des Hindernisses zu wählen.

Die so konstruierte Gewichtsfunktion $w_{\gamma,\sigma}^k$ ist eine normierte Plateau-Gewichtsfunktion. Die Abbildungen 4.2(a-f) zeigen einige Beispiele solcher Gewichtsfunktionen zu Hindernissen. Mit Hilfe der Gewichtsfunktion werden nun Raummodifikationen angegeben. Als erstes werden Hindernisse bestehend aus affinen Untervektorräumen betrachtet. Dies sind sehr spezielle geometrische Objekte, aber das Vorgehen kann leicht auf beliebige glatt berandete Mannigfaltigkeiten übertragen werden. Im Folgenden sei also das Hindernis v_H ein affiner Untervektorraum der Dimension d_H .

Lemma 4.4. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt, das Hindernis $v_H \subseteq \Omega$ ein affiner Untervektorraum des \mathbb{R}^d und sei weiter die Menge $\mathcal{M}(B, \mathcal{A}) \subseteq \Psi_{\mathcal{Z}}(\Omega)$ eine Menge von k -flexiblen k -mal stetig differenzierbaren FFD-Funktionen und $w_{\gamma,\sigma}^k$ eine normierte Plateau-Gewichtsfunktion. Dann ist E_H gegeben durch

$$E_H(B, \mathcal{A}) := E_{\text{inj}}(w_{\gamma,\sigma}^k B, \mathcal{A}) \quad (4.48)$$

eine Raummodifikation von $\mathcal{M}(B, \mathcal{A})$ zu der Hindernisrestriktion v_H .

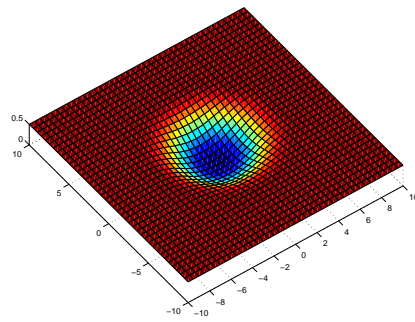
Beweis. Wir zeigen, dass die FFD-Funktionen die Hindernisrestriktion einhalten. Sei $\varphi_A \in E_H(\mathcal{M}(B, \mathcal{A}))$ eine finite FFD-Funktion, für einen Punkt $x^* \in v_H$, dann gilt

$$\varphi_A(x^*) = x^* + w_{\gamma,\sigma}^k(x^*)B(x^*)A \stackrel{4.37}{=} x^* + 0B(x^*)A = x^* \quad (4.49)$$

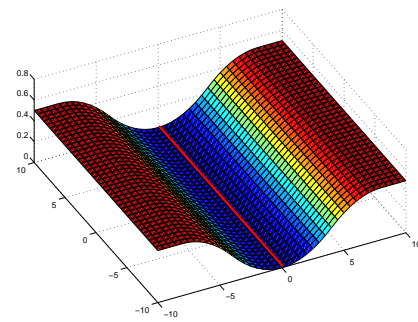
für alle $A \in \mathcal{A}$. Nach Lemma 4.2 ist φ_A injektiv auf Ω und damit injektiv auf $u \cup v_H$, also existiert kein $\tilde{x} \in u$ mit $\varphi_A(\tilde{x}) \in v_H$. \square

Für den Beweis würde es genügen, die Injektivität von ψ auf $u \cup v$ für lokal zulässige und $\bigcup_{u \in \mathcal{Z}} u \cup v$ für global zulässige FFD-Funktionen zu fordern. Diese Bedingung ist aber schwer in eine Raummodifikation zu fassen, deswegen wird hier die Injektivität auf ganz Ω gefordert.

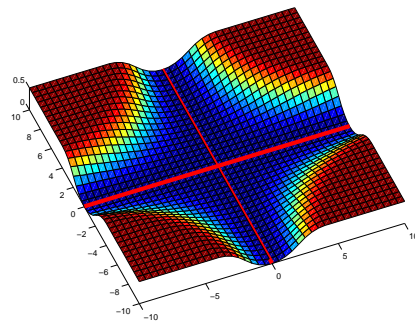
Beispiel 4.9. Wir betrachten wieder Beispiel 2.1. Um eine lokal zulässige Menge von FFD-Funktionen zu erhalten, in die das Hindernis W integriert ist, müsste



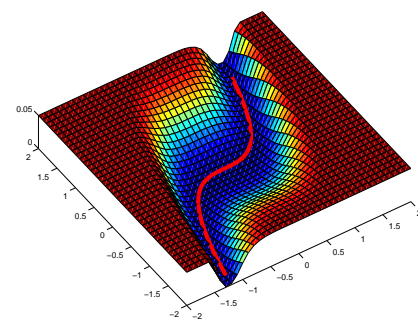
(a) Punkthindernis



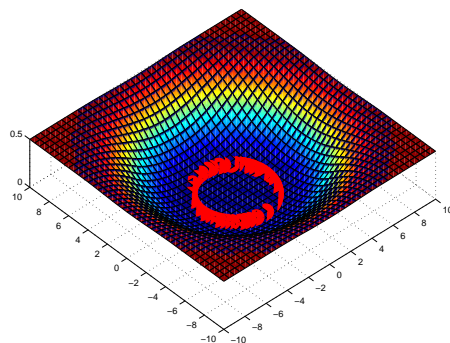
(b) Geradenhindernis



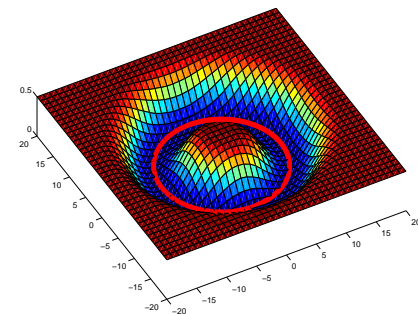
(c) Hindernis aus zwei Geraden



(d) Kurvenhindernis



(e) Kreisscheibenhindernis



(f) Kreishindernis

Abbildung 4.2: Gewichtsfunktionen zu Hindernisrestriktionen

nur sichergestellt werden, dass die FFD-Funktionen injektiv auf W und s sind. Für eine Menge von global zulässigen FFD-Funktion in die das Hindernis integriert ist, wäre es allerdings nötig zu fordern, dass die FFD-Funktionen auf ganz Ω zulässig sind, da zu jedem Punkt von Ω , der nicht in W enthalten ist, eine zulässige Seilkurve s existiert, die durch diesen Punkt geht. Hier ist die Anforderung an die Raummodifikation nicht zu stark, falls global zulässige FFD-Funktionen betrachtet werden.

Bemerkung 4.4. In der Praxis ist es sinnvoll, die Raummodifikation

$$E_H(B, \mathcal{A}) := (w_{\gamma, \sigma}^k B, \mathcal{A}) \quad (4.50)$$

zu verwenden und numerisch auf Injektivität zu überprüfen. Für kleine Freiheitsgrade $\|A\|_\infty < \epsilon$ sind die Deformationen auf Ω meist injektiv.

Wir überprüfen, ob E_H die Voraussetzungen für einen Erweiterungsoperator erfüllt.

Lemma 4.5. Die durch Definition 4.4 gegebene Raummodifikation E_H ist Flexibilitätserhaltend.

Beweis. Sei $\mathcal{Z} = \mathfrak{P}(\Omega)$, das Hindernis ν_H sei ein affiner Untervektorraum und $\text{flex}(\mathcal{M}(B, \mathcal{A})) = k$. Es ist zu zeigen, dass $\text{flex}(\mathcal{M}(E_H(B, \mathcal{A}))) \geq k$ gilt. Wir betrachten die Flexibilität von $\mathcal{M}(E_H(B, \mathcal{A}))$ im Punkt x und unterscheiden drei Fälle.

1. Falls $d(x, \nu_H) = 0$, also $x \in \nu_H$ gilt, muss keine Flexibilität nachgewiesen werden, da dieser Punkt nach Voraussetzung nicht in einem zulässigen geometrischen Objekt enthalten sein kann.
2. Falls $d(x, \nu_H) > \sigma$ ist, so ist $w_{\gamma, \sigma}^k$, da es eine Plateau-Gewichtsfunktion ist, konstant γ . Dann gilt für jedes $\varphi_A \in \mathcal{M}(\tilde{B}, \tilde{\mathcal{A}}) = \mathcal{M}(E_H(B, \mathcal{A}))$

$$\varphi_A = \mathcal{I} + \gamma BA = \mathcal{I} + B(\gamma A) = \mathcal{I} + BA^*. \quad (4.51)$$

Da $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} = \mathbb{R}^n$ und damit $A^* \in \tilde{\mathcal{A}}$ gilt, ist φ_A für $d(x, \nu_H) > \sigma$ k -flexibel, da $\mathcal{M}(B, \mathcal{A})$ k -flexibel ist.

3. Es bleibt der Fall $0 < d(x, v_H) \leq \sigma$. Dafür betrachten wir das Taylorpolynom $T_{\varphi_A \circ c}^k(t_0, t)$ von $\varphi_A \in \mathcal{M}(E_H(B, \mathcal{A}))$ an der Stelle t_0 mit $c(t_0) = x$. Wie bei dem Beweis der Flexibilität der polynomialen FFD-Räume, genügt es zu zeigen, dass das Gleichungssystem

$$\beta_i = \text{diag}\left(\frac{1}{0!}, \dots, \frac{1}{k!}\right) W_{\tilde{B}(c(t))} \alpha_i \quad (4.52)$$

für jedes β_i lösbar ist. Da $e_j \tilde{B}(c(t)) = e_j w_{\gamma, \sigma}^k(c(t)) B(c(t))$ gilt, erhält man für die Wronskimatrix von $e_j \tilde{B}(c(t))$ mit $\omega(t) := w_{\gamma, \sigma}^k(c(t))$

$$W_{e_j \tilde{B}(c(t))} = \begin{pmatrix} \omega(t) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \frac{d^k}{dt^k} \omega(t) & \dots & \dots & \omega(t) \end{pmatrix} \cdot W_{e_j B(c(t))} \quad (4.53)$$

Wegen der k -Flexibilität von $\mathcal{M}(B, \mathcal{A})$ ist bekannt, dass $W_{e_j B(c(t))}$ regulär für jedes j ist. Da $\omega(t) = w_{\gamma, \sigma}^k(c(t)) \neq 0$ für $c(t) \notin v_H$ und damit

$$\det(W_{e_j \tilde{B}(c(t))}) \neq 0 \quad (4.54)$$

gilt, ist das Gleichungssystem (4.52) für jedes β_i lösbar. Also ist die Menge $\mathcal{M}(E_H(B, \mathcal{A}))$ auch für $0 < d(x, v_H) \leq \sigma$ k -flexibel.

□

Lemma 4.6. Die durch Definition 4.4 gegebene Raummodifikation E_H ist konvex.

Beweis. Sei $\mathcal{Z} = \mathfrak{P}(\Omega)$, dann ist die Menge der zulässigen FFD-Funktionen gegeben durch die Menge aller FFD-Funktionen. Sei $(\tilde{B}, \tilde{\mathcal{A}}) := E_H(B, \mathcal{A})$, da \tilde{B} eine Basis von $\Psi_{\mathcal{Z}}(\Omega)$ ist, ist jedes $A \in \mathbb{R}^n$ zulässig. Insbesondere ist jedes $A \in \tilde{\mathcal{A}}$ zulässig, diese Menge ist aber konvex, da E_{inj} eine konvexe Raummodifikation ist. □

Lemma 4.7. Die durch Definition 4.4 gegebene Raummodifikation E_H ist normiert.

Beweis. Es gilt

$$(w_{\gamma, \sigma}^k(x) B(x), \tilde{\mathcal{A}}) = (\tilde{B}, \tilde{\mathcal{A}}) = E_{\text{inj}}(w_{\gamma, \sigma}^k(x) B(x), \mathcal{A}) \quad (4.55)$$

für $x \in \Omega$. Da $w_{\gamma,\sigma}^k$ eine normierte Gewichtsfunktion ist, gilt $\|w_{\gamma,\sigma}^k\|_\infty \leq 1$, dann folgt

$$\|b_j^*\|_{\infty,\Omega} \leq \|w_{\gamma,\sigma}^k\|_{\infty,\Omega} \|b_j\|_{\infty,\Omega} \leq \|b_j\|_{\infty,\Omega} \quad (4.56)$$

mit $b_j^* = w_{\gamma,\sigma}^k b_j \in \tilde{B}$ für jedes $b_j \in B$. Damit ist Bedingung (4.5) erfüllt.

Weiter gilt, $m_B = m_{\tilde{B}}$ und $\tilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}$, also auch

$$\max_{A \in \tilde{\mathcal{A}}} \|A\|_\infty \leq \max_{A \in \mathcal{A}} \|A\|_\infty, \quad (4.57)$$

damit ist Bedingung (4.7) erfüllt.

Als letztes muss die Bedingung (4.6) überprüft werden. Es gilt

$$J(b_i^*) = (\nabla w_{\gamma,\sigma}^k)^T b_i + w_{\gamma,\sigma}^k J_i. \quad (4.58)$$

Da wegen der Normiertheit von $w_{\gamma,\sigma}^k$, $\|w_{\gamma,\sigma}^k\|_\infty \leq 1/2$ und $\|\nabla w_{\gamma,\sigma}^k\|_\infty \leq \eta$ gilt, folgt

$$\|J(b_i^*)\|_\infty \leq \|\nabla w_{\gamma,\sigma}^k\|_\infty \cdot \|b_i\|_\infty + \|w_{\gamma,\sigma}^k\|_\infty \cdot \|J_i\|_\infty \quad (4.59)$$

$$\leq 1/2 \frac{\max_k \|J_k\|_\infty}{\max_j \|b_j\|_\infty} \|b_i\|_\infty + 1/2 \|J_i\|_\infty \quad (4.60)$$

$$\leq 1/2 \max_k \|J_k\|_\infty + 1/2 \|J_i\|_\infty \quad (4.61)$$

$$\leq \max_k \|J_k\|_\infty \quad (4.62)$$

für alle b_i^* , damit ist auch Bedingung (4.6) erfüllt. \square

Da die Raummodifikation E_H normiert ist, kann, falls $E_{\text{inj}}(B, \mathcal{A}) = (B, \mathcal{A})$ gilt, die Menge der finiten FFD-Funktionen also bereits injektiv ist, die Raummodifikation E_H durch $E_H(B, \mathcal{A}) := (w_{\gamma,\sigma}^k B, \mathcal{A})$ ersetzt werden, ohne dass die Eigenschaften verloren gehen.

Nachdem für die Raummodifikation E_H die drei Eigenschaften gezeigt wurden, kann man den folgenden Satz angeben.

Theorem 4.2. *Die durch Definition 4.4 gegebene Raummodifikation E_H ist ein Erweiterungsoperator.*

Um nicht nur Geraden als Hindernisse zuzulassen, sondern auch Kurven, ist es nötig, bei der Gewichtsfunktion $w_{\gamma,\sigma}^k$ das σ durch die maximale Krümmung

$$\kappa = \max_t \frac{\|c'(t) \times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3} \quad (4.63)$$

zu bestimmen. Dazu wird,

$$\sigma = \min \{ (2\kappa)^{-1}, 1 \} \quad (4.64)$$

gesetzt. So wird sichergestellt, dass die Gewichtsfunktion k -mal stetig differenzierbar auf Ω ist, falls die zu fixierende Kurve k -mal stetig differenzierbar ist. Der Erweiterungsoperator zu einer Hinderniskurve ist dann durch den Erweiterungsoperator E_H mit der Gewichtsfunktion $w_{\gamma,\sigma}^k$ gegeben, wobei σ durch (4.64) bestimmt ist.

Ebenso können implizit gegebene geometrische Objekte, wie ein Kreis oder eine Kugel, durch einfache Modifikationen der Gewichtsfunktion als Raummodifikation realisiert werden. Probleme gibt es bei geometrischen Objekten, die sich nicht durch einfache geometrische Objekte zusammensetzen lassen oder zu denen es keine implizite Darstellung gibt.

In vielen Beispielen wird mit Boundingboxen gearbeitet. Dies ist eine Menge von affinen Untervektorräumen H_i , meistens der Dimension 2 oder 3, die den Rand von Ω bilden. Man erhält den dazugehörigen Raummodifikator durch die Hintereinanderausführung der einzelnen Raummodifikationen. Dabei bleiben alle Eigenschaften der Raumerweiterungen erhalten. Als Beispiel wird eine Boundingbox für den \mathbb{R}^3 angegeben. Sei $\Omega = [-1, 1]^3$ und die Boundingbox ist gegeben durch die Ebenen

$$\begin{aligned} H_1(\lambda, \mu) &= e_1 + \lambda e_2 + \mu e_3, \\ H_2(\lambda, \mu) &= e_2 + \lambda e_1 + \mu e_3, \\ H_3(\lambda, \mu) &= e_3 + \lambda e_1 + \mu e_2, \\ H_4(\lambda, \mu) &= -e_1 + \lambda e_2 + \mu e_3, \\ H_5(\lambda, \mu) &= -e_2 + \lambda e_1 + \mu e_3, \\ H_6(\lambda, \mu) &= -e_3 + \lambda e_1 + \mu e_2. \end{aligned}$$

Dabei ist jede Ebene H_i eine Hindernisebene (siehe Abbildung 4.3). Ausgehend von dem Erweiterungsoperator für Hindernisebenen erhält man die Boundingbox Raummodifikation

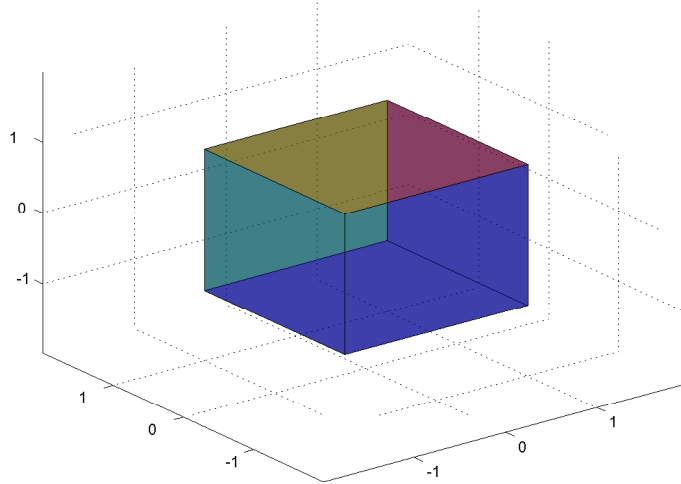


Abbildung 4.3: Boundingbox

Lemma 4.8. Sei H_i eine Menge von Ebenen, die eine Boundingbox bilden und die Menge $\mathcal{M}(B, \mathcal{A}) \subseteq \Psi_{\mathbb{Z}}(\Omega)$ sei eine Menge von k -flexiblen und k -mal stetig differenzierbaren FFD-Funktionen. Dann ist die Raummodifikation E_B von (B, \mathcal{A}) zu der Boundingbox H_i , gegeben durch

$$E_B(B, \mathcal{A}) := E_{inj}([\Pi_{i=1}^r w_{H_i}^k] \cdot B, \mathcal{A}). \quad (4.65)$$

4.2.2 FIXIERUNG

Fixierungen sind geometrische Objekte, die das zu optimierende geometrische Objekt an einer Stelle des Raumes fixieren. Im Gegensatz zu Hindernissen, die auch im Raum fixiert sind, also nicht deformiert werden dürfen, sind Fixierungen immer Teil des zu optimierenden geometrischen Objektes. Deswegen muss bei einer Raummodifikation zu einer Fixierung, im Gegensatz zu den Hindernisraummodifikationen, auch die Flexibilität auf der Fixierung betrachtet werden. Dies führt im Allgemeinen, falls die Dimension der Fixierung kleiner ist als $\dim(\Omega) - 1$, zu Raumüberlagerungen. Fixierungen, deren Dimension gleich der Dimension von Ω oder ein geringer ist, können durch Hindernisrestriktionen ersetzt werden, ohne Flexibilität zu verlieren.

Zuerst aber die Definition einer Fixierung von geometrischen Objekten.

Definition 4.7. Ein geometrisches Objekt $v \subseteq \Omega$ heißt Fixierung, falls

$$v \subseteq u \quad (4.66)$$

für alle zulässigen Objekte $u \subseteq \Omega$ gilt.

Beispiele 4.10. Betrachtet man Beispiel 2.1, so sind dort die Punkte P und Q typische Fixierungen. Denn für jedes zulässige Seil s gilt, $\{P, Q\} \subseteq s$. Weitere Fixierungen sind bei dem Booster durch die fixierten Punkte (Zitronenform, Aufsatz) gegeben. Bei der Minimalfläche sind die Ebenen, die die Sphäre schneiden Fixierungen. Allerdings würde es hier genügen, den Schnitt der Kugel mit den Ebenen als Fixierung zu werten und den Rest als Hindernis.

Genauso wie bei den Hindernisrestriktionen sollen solche Fixierungsrestriktionen nicht in Nebenbedingungen g, h umgewandelt werden, sondern in den Raum der FFD-Funktionen integriert werden. Dazu werden hinreichende Bedingungen angegeben, die sicherstellen, dass eine FFD-Funktion eine Fixierungsrestriktion einhält. Eine Menge \mathcal{M} von injektiven FFD-Funktionen ψ erfüllt eine Fixierungsrestriktion v , falls

$$x \in v \Rightarrow \psi(x) = x \quad (4.67)$$

für jedes $\psi \in \mathcal{M}$ gilt. Denn sei v eine Fixierungsrestriktion und u ein zulässiges geometrisches Objekt, dann gilt

$$\psi(v) \stackrel{(4.67)}{=} v \subseteq \psi(u) \quad (4.68)$$

da $\psi(u \cap v) \stackrel{(4.67)}{=} u \cap v$ gilt. Die Menge der injektiven FFD-Funktionen, die die Bedingung (4.67) erfüllen, werden mit $\Psi_{\mathcal{Z}}^*(\Omega)$ bezeichnet. Offensichtlich ist es möglich, dass $\Psi_{\mathcal{Z}}^*(\Omega) \subsetneq \Psi_{\mathcal{Z}}(\Omega)$ gilt. Denn die Bedingung (4.67) ist eine stärkere Restriktion als die Fixierungsrestriktion (4.7). Allerdings kann in vielen Fällen das Optimierungsproblem so gestellt werden, dass $\Psi_{\mathcal{Z}}^*(\Omega) = \Psi_{\mathcal{Z}}(\Omega)$ gilt. Hierzu ein Beispiel:

Beispiel 4.11. Wir betrachten wieder Beispiel 2.1. Eine Nebenbedingung an das Seil s war gegeben durch $P \in s$ und $Q \in s$. Es sind also auch solche Seile zulässig, die nicht in P oder Q beginnen und nicht in P oder Q enden. Allerdings ist die

Länge solcher Seile immer größer als die Länge des Teilstücks mit Anfang in P und Ende in Q . Für das Optimierungsproblem genügt es also, sich mit den Teilstücken zwischen P und Q zu befassen. Sei nun s_0 der Anfang des Seiles und s_1 das Ende, dann gilt für jedes Seil mit $s_0 = P$ und $s_1 = Q$, dass es die Nebenbedingungen $P \in s$ und $Q \in s$ erfüllt. Dies entspricht gerade der Bedingung (4.67) für FFD-Funktionen, da jede Deformation von s , sicherstellt, dass $\psi(s_0) = P$ und $\psi(s_1) = Q$ gilt.

Würde als Raummodifikation zu einer Fixierung ν der Dimension d_ν mit $d_\nu \leq \dim(\Omega) - 2$ eine Hindernis-Raummodifikation E_H verwendet werden, so wäre die modifizierte Menge von FFD-Funktionen nur 0-flexibel, denn das Taylorpolynom an der Stelle t_0 mit $c(t_0) \in \nu$ ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}
T_{\varphi_A \circ c(t)}^k(t_0; t) &= \frac{1}{0!} c(t_0) + \underbrace{w_{\gamma, \sigma}^k c(t_0)}_{=0} BA \\
&+ \frac{1}{1!} (c'(t)|_{t=t_0} + \underbrace{\frac{d}{dt} w_{\gamma, \sigma}^k(c(t))|_{t=t_0}}_{=0} BA + \underbrace{w_{\gamma, \sigma}^k(c(t_0))}_{=0} \frac{d}{dt} BA) (t - t_0) \\
&+ \frac{1}{2!} (c''(t)|_{t=t_0} + 0 + \dots + 0) (t - t_0)^2 \\
&\vdots \\
&+ \frac{1}{k!} (c^{(k)}(t)|_{t=t_0}) (t - t_0)^k,
\end{aligned}$$

da $\frac{d^i}{dt^i} w_{\gamma, \sigma}^k(c(t))|_{t=t_0} = 0$ für alle t mit $c(t) \in \nu$ und $0 \leq i \leq k$ gilt. Diese Raummodifikation wären also nicht flexibilitäts-erhaltend, da nur ein einziges Taylorpolynom, nämlich das der ursprünglichen Kurve c dargestellt werden kann. Um eine geeignete flexibilitäts-erhaltende Raummodifikation zu erhalten, verwendet man Raumüberlagerungen.

Für eine Raummodifikation zu einer Fixierung ν wird, genauso wie bei den Hindernissen, eine Gewichtsfunktion $w_{\gamma, \sigma}^k$ benötigt, wie sie durch Definition 4.6 gegeben ist. Durch die Eigenschaft $x \in \nu \Rightarrow w_{\gamma, \sigma}^k(x) = 0$, gegeben durch (4.37), wird sichergestellt, dass die Fixierungsbedingung (4.67) erfüllt wird. Es wird allerdings noch eine weitere Eigenschaft benötigt.

Definition 4.8. Eine Gewichtsfunktion $w_{\gamma,\sigma}^k$ heißt tangentialflexible Gewichtsfunktion zu einer Fixierung v , falls

$$\nabla w_{\gamma,\sigma}^k(x) = 0 \Leftrightarrow d(x, v) \geq \sigma \quad (4.69)$$

gilt.

Genauso wie bei den Hindernissen beschränkt man sich bei den Fixierung zuerst auf affine Untervektorräume. Sei also v_F ein affiner Untervektorraum der Dimension d_v im \mathbb{R}^d und $Y_i \subset \mathbb{R}^d$ seien $d - d_v$ Hyperebenen des \mathbb{R}^d , die durch die Aufpunkte Q_i und Normalenvektoren \vec{n}_i , mit

$$\bigcap_{i=1}^{d-d_v} Y_i = v_F \quad (4.70)$$

gegeben sind. Sei weiter $r_i(x) := \vec{n}_i^T(Q_i - x)$. Um eine geeignete Raummodifikation zu konstruieren, wird zu jeder Hyperebene Y_i eine Gewichtsfunktion $w_{\gamma,\sigma,i}^k$, die k -mal stetig differenzierbar ist und für die

$$w_{\gamma,\sigma,i}^k(x) = 0 \Leftrightarrow x \in Y_i, \quad (4.71)$$

$$\nabla w_{\gamma,\sigma,i}^k(x)|_{x \in Y_i} \neq 0 \quad (4.72)$$

und $w_{\gamma,\sigma,i}^k(x) = \text{sign}(r_i)\gamma$ falls $|r_i| \geq \sigma$ gilt, verwendet. Eine solche Gewichtsfunktion ist eine tangentialflexible Plateau-Gewichtsfunktion.

Um eine solche Gewichtsfunktion zu konstruieren, wird eine Hilfsfunktion s_γ^k gegeben durch

$$s_\gamma^k(t) := \sum_j b_j^{2k+2} \left(\frac{t+1}{2} \right) p_j \quad (4.73)$$

mit

$$P = [-\gamma^\#(k+1), \gamma^\#(k+1)] \quad (4.74)$$

verwendet (siehe Abbildung 4.4 für Beispiele). Dann kann eine normierte tangentialflexible Plateau-Gewichtsfunktion $w_{\gamma,\sigma,i}^k$ wie folgt konstruiert werden.

$$w_{\gamma,\sigma,i}^k(x) := \begin{cases} \gamma, & \text{falls } r_i \geq \sigma \\ -\gamma, & \text{falls } r_i \leq -\sigma \\ s_\gamma^k(\sigma^{-1}r_i), & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.75)$$

mit

$$\gamma := \frac{1}{(d - d_v)} \min \left\{ \frac{1}{8(k+1)\sigma} \left(\frac{\max_i \|J_i\|_{\infty, \Omega}}{\max_j \|b_j\|_{\infty, \Omega}} \right), \frac{1}{2} \right\}. \quad (4.76)$$

bei bekanntem B und σ . Mit Hilfe der Gewichtsfunktion kann nun eine Raum-

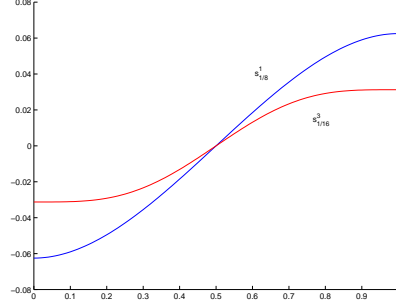


Abbildung 4.4: s^1 und s^3

modifikation zu Fixierungen, die durch affine Untervektorräume gegeben sind, angegeben werden.

Definition 4.9. Sei die Fixierung $v_F \subseteq \mathbb{R}^d$ ein affiner Untervektorraum der Dimension d_v und es gelte $\Psi_{\mathcal{Z}}^*(\Omega) = \Psi_{\mathcal{Z}}(\Omega)$. Die Menge $\mathcal{M}(B, \mathcal{A}) \subseteq \Psi_{\mathcal{Z}}^*(\Omega)$ sei eine Menge von k -flexiblen FFD-Funktionen. Weiter seien $d - d_v$ Hyperebenen Y_i , ($1 \leq i \leq d - d_v$), deren Normalenvektoren \vec{n}_i linear unabhängig sind und für die

$$\bigcap_{i=1}^{d-d_v} Y_i = v_F \quad (4.77)$$

gilt, gegeben. Zu den Hyperebenen seien tangentialflexible normierte Plateau-Gewichtsfunktionen $w_{\gamma, \sigma, l}^k$ gegeben. Dann ist die Raummodifikation E_F von (B, \mathcal{A}) zur Fixierung v_F , gegeben durch

$$E_F(B, \mathcal{A}) := E_{inj} \left([w_{\gamma, \sigma, 1}^k B(x), \dots, w_{\gamma, \sigma, d-d_v}^k B(x)], \frac{1}{d - d_v} \prod^{d-d_v} \mathcal{A} \right) \quad (4.78)$$

dabei ist

$$\prod^k \mathcal{A} := \underbrace{\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \dots \mathcal{A}}_{k \text{ mal}}. \quad (4.79)$$

Aus der Injektivität und den Eigenschaften der Gewichtsfunktion folgt, dass E_F eine Raummodifikation zu der Fixierung v_F ist. Bevor wir uns mit den Eigenschaften der Raummodifikation beschäftigen, soll das folgende Beispiel die Raummodifikation anschaulich erläutern.

Beispiel 4.12. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ und Q ein fixierter Punkt, es gilt also $\dim(\Omega) = 2$ und $\dim(v_F) = 0$. Dann werden zwei ($d - d_v = 2$) Geraden g_1, g_2 , die sich in dem zu fixierenden Punkt Q schneiden (siehe Abbildung 4.5(a)), für eine flexibilitätserhaltende Raummodifikation benötigt. Um den Begriff der Raumüberlagerung zu erklären, kann man die Geraden als Hindernisse betrachten. Dann kann man zwei Hindernis-Raummodifikationen E_{g_1} und E_{g_2} angeben, die auf (B, \mathcal{A}) angewandt zwei Mengen von FFD-Funktionen liefern und die Hindernis-Restriktionen und damit auch die Fixierungsrestriktion einhalten. Aber diese beiden Mengen von FFD-Funktionen sind nicht flexibel genug. Damit man eine Menge von FFD-Funktionen erhält, die genauso flexibel ist wie die Ausgangsmenge, konstruiert man die Gewichtsfunktionen $w_{\gamma, \sigma, 1}^k$ und $w_{\gamma, \sigma, 2}^k$ zu den beiden Hindernisgeraden g_1 und g_2 (siehe Abbildung 4.5(b) und 4.5(c)) und wendet diese genauso wie bei den Raummodifikationen zu den Hindernisrestriktionen auf B an. So erhält man zwei verschiedene B_1 und B_2 , die jeweils eine Gerade fixieren. Überlagert man nun die von diesen beiden Basen aufgespannten Räume, verwendet also als Basis die Summe der beiden modifizierten Basen, so wird nur der Schnittpunkt der beiden Geraden fixiert (siehe Abbildung 4.5(d)). Sei zum Beispiel die Basis gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \quad (4.80)$$

dann sind die beiden einzelnen mit $w_{\gamma, \sigma, i}^k$ gewichteten Basen gegeben durch

$$B_i = \begin{pmatrix} w_{\gamma, \sigma, i}^k & w_{\gamma, \sigma, i}^k x_1 & w_{\gamma, \sigma, i}^k x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{\gamma, \sigma, i}^k & w_{\gamma, \sigma, i}^k x_1 & w_{\gamma, \sigma, i}^k x_2 \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

und für die Überlagerung erhält man

$$B = (B_1 \mid B_2) \quad (4.82)$$

Diese Überlagerung führt aber zu einer Verdopplung der Freiheitsgrade, das heißt, falls $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ war, ist die modifizierte zulässige Koeffizientenmenge \mathcal{A}^* aus dem

\mathbb{R}^{2n} , da zu jeder Basis die gleiche Menge von Freiheitsgraden benötigt werden. Darüber hinaus wird jedes Element mit dem Faktor $1/2$ skalar multipliziert, falls also die Menge der zulässigen Freiheitsgrade durch

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathbb{R}^n \mid \|A\|_\infty \leq 1\} \quad (4.83)$$

beschrieben ist, so ist die modifizierte Menge durch

$$\mathcal{A}^* = \{A \in \mathbb{R}^{2n} \mid \|A\|_\infty \leq 1/2\} \quad (4.84)$$

gegeben. Dies ist nötig, um eine normierte Raummodifikation zu erhalten.

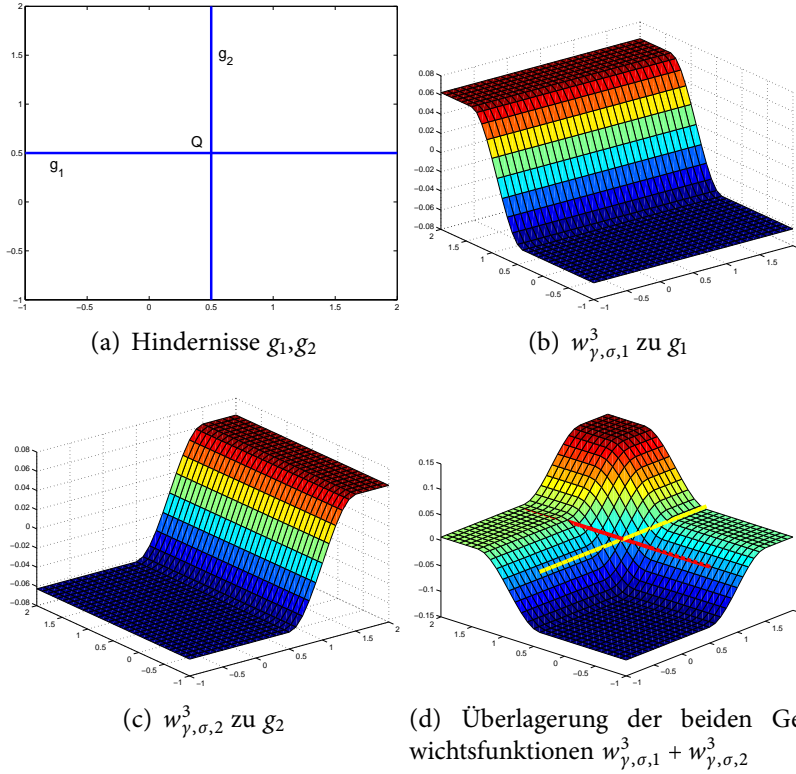


Abbildung 4.5: Beispiel für Punktfixierung durch Überlagerung

Nachstehend soll gezeigt werden, dass die hier definierte Raummodifikation ein Erweiterungsoperator ist. Dazu müssen die Eigenschaften der Flexibilitätserhaltung, Konvexität und die Normiertheit nachgewiesen werden.

Lemma 4.9. *Die durch Definition 4.9 gegebene Raummodifikation E_F ist flexibilitäts-erhaltend.*

Beweis. Sei $\mathcal{Z} = \mathfrak{P}(\Omega)$ und die Fixierung v_F sei ein affiner Untervektorraum und $\text{flex}(\mathcal{M}(B, \mathcal{A})) = k$. Es ist zu zeigen, dass $\text{flex}(\mathcal{M}(E_F(B, \mathcal{A}))) \geq k$ gilt. Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Falls eine l existiert, so dass $r_l(x) := \vec{n}_l^T(Q_l - x) \geq \sigma$ oder $r_l(x) < -\sigma$ gilt, dann ist $w_{\gamma, \sigma, l}^k$ konstant $\pm \gamma$. Man kann $\varphi_A \in \mathcal{M}(E_F(B, \mathcal{A}))$ schreiben als

$$\varphi_A = \mathcal{I} + \sum_{i=1}^{d-d_v} w_{\gamma, \sigma, i}^k B A_i = \mathcal{I} \pm \gamma B A_l = \mathcal{I} + B A_l^*, \quad (4.85)$$

wobei $A_j = 0$ für alle $j \neq l$ gewählt wird. Da $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$ und damit $A_l \in \mathcal{A}$ gilt, ist φ_A für $|r_l(x)| \geq \sigma$ k -flexibel, da $\mathcal{M}(B, \mathcal{A})$ k -flexibel ist.

2. Als nächstes betrachten wir den Fall, dass $|r_j| \leq \sigma$ für alle j und $\prod_j |r_j| \neq 0$ gilt. In diesem Fall gibt es eine l mit $r_l \neq 0$ und man kann wieder $A_j = 0$ für alle $j \neq l$ wählen. Damit wurde dieser Fall auf den Hindernisfall reduziert und die Flexibilität folgt aus dem Beweis der Flexibilität von der Hindernisrestriktion.
3. Als letztes wird die Flexibilität von $\mathcal{M}(E_F(B, \mathcal{A}))$ in einem Punkt $x \in v_F$ betrachtet. Da v_F ein affiner Untervektorraum der Dimension d_v ist, existieren d_v linear unabhängige Vektoren v_i für die

$$v_F = x + \sum_{i=1}^{d_v} \lambda_i v_i \quad (4.86)$$

gilt. Sei c eine reguläre k -mal stetig differenzierbare Kurve mit $c(t_0) = x$ mit

$$\left. \frac{d^j}{dt^j} c(t) \right|_{t=t_0} \in \text{spann}(v_1, \dots, v_{d_v}) \quad (4.87)$$

für $1 \leq j \leq l \leq k$ und falls $j < k$ gilt, sei l so gewählt, dass

$$\left. \frac{d^{l+1}}{dt^{l+1}} c(t) \right|_{t=t_0} \notin \text{spann}(v_1, \dots, v_{d_v}) \quad (4.88)$$

gilt. Dann folgt, dass für jedes $\psi \in \Psi^*$

$$\begin{aligned}
 T_{\psi \circ c}^k(t_0; t) - T_c^k(t_0; t) &= T_{\Delta\psi \circ c}^k(t_0; t) \\
 &= \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dt^j} \Delta\psi(c(t)) \Big|_{t=t_0} (t - t_0)^j \\
 &= \sum_{j_1=0}^l \frac{1}{j_1!} \frac{d^{j_1}}{dt^{j_1}} \Delta\psi(c(t)) \Big|_{t=t_0} (t - t_0)^{j_1} \\
 &\quad + \sum_{j_2=l+1}^k \frac{1}{j_2!} \frac{d^{j_2}}{dt^{j_2}} \Delta\psi(c(t)) \Big|_{t=t_0} (t - t_0)^{j_2} \\
 &= \sum_{j=l+1}^k \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dt^j} \Delta\psi(c(t)) \Big|_{t=t_0} (t - t_0)^j
 \end{aligned}$$

gilt, da aus $\Delta\psi(x) \equiv 0$ für $x \in v_F$ und (4.87),

$$\frac{d^j}{dt^j} \Delta\psi(c(t)) \Big|_{t=t_0} = 0 \quad (4.89)$$

für alle $j, 1 \leq j \leq l$, folgt.

Um zu zeigen, dass ein $A \in \mathcal{A}$ existiert, für das $T_{\varphi \circ c}^k(t_0; t) = T_{\psi \circ c}^k(t_0; t)$ gilt, ist zu zeigen, dass ein A existiert, so dass die Gleichung für die Koeffizienten β, α der Taylorpolynome gegeben durch

$$D^{-1} \beta_i = D^{-1} \sum_{j=1}^{d-d_v} W_{w_{\gamma, \sigma, j}^k e_i B}(t_0) A \quad (4.90)$$

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{d-d_v} W_{w_{\gamma, \sigma, j}^k e_i B}(t_0) A \quad (4.91)$$

mit $D := \text{diag}(0!, \dots, (d - d_v)!)$ für jedes $i, 1 \leq i \leq d$ lösbar ist. Da

$$\beta_i = \left(\begin{array}{c} \frac{d^0}{dt^0} \Delta\psi(c(t)) \\ \vdots \\ \frac{d^{d-d_v}}{dt^{d-d_v}} \Delta\psi(c(t)) \end{array} \right) \Big|_{t=t_0} \quad (4.92)$$

gilt, folgt mit (4.89), dass $\beta_{i,j} = 0$ für alle $j, 1 \leq j \leq l$ gilt. Falls $l = k$ gilt, so folgt $\beta = 0$ und die Lösung des Gleichungssystems ist trivial. Sei also

$l < k$ und

$$\beta_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_i^* \end{pmatrix}, \text{ mit } \beta_i^* = \begin{pmatrix} \beta_{i,l+1} \\ \vdots \\ \beta_{d-d_v} \end{pmatrix}, \quad (4.93)$$

aus (4.88) und (4.77) folgt, dass $c^{(l+1)}(t_0)$ in dem von \vec{n}_i aufgespannten Untervektorraum liegt, dann existiert aber ein i^* mit $\vec{n}_{i^*}^T c^{(l+1)}(t_0) \neq 0$. Sei $j := i^*$ und $\omega_m := \frac{d^m}{dt^m} w_{\gamma,\sigma,j}^k(c(t)) \Big|_{t=t_0}$, dann ist $W_{w_{\gamma,\sigma,j}^k e_i B}$ gegeben durch

$$W_{w_{\gamma,\sigma,j}^k e_i B} = W_{w_{\gamma,\sigma,j}^k} \cdot W_{e_i B} \quad (4.94)$$

mit

$$W_{w_{\gamma,\sigma,j}^k} \Big|_{t=t_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ W^* & 0 \end{pmatrix} \quad (4.95)$$

und

$$W_w^* = \begin{pmatrix} \omega_{l+1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \omega_{d-d_v} & \dots & \dots & \omega_{l+1} \end{pmatrix} \quad (4.96)$$

da $\frac{d^m}{dt^m} w_{\gamma,\sigma,j}^k(c(t)) \Big|_{t=t_0} = 0$ für $0 \leq m \leq l$ gilt. Die Matrix W_w^* ist regulär, da nach Voraussetzung $\omega_{l+1} \neq 0$ gilt. Ebenso ist $W_{e_i B}$ regulär, da die Menge der durch die Basis B gegebenen FFD-Funktionen k -flexibel ist. Sei $d_l := d - d_v - l - 1$, dann können die Spalten von $W_{e_i B}$ so durch eine Spaltenvertauschungsmatrix S getauscht werden, dass

$$W_{e_i B} S = \begin{pmatrix} W_{e_i B}^* & W_1 \\ W_2 & W_3 \end{pmatrix} \quad (4.97)$$

mit $W_{e_i B}^* \in \mathbb{R}^{d_l \times d_l}$ und $W_{e_i B}^*$ regulär gilt. Dann ist das Gleichungssystem

$$\beta_i^* = W_w^* \cdot W_{e_i B}^* \cdot A^* \quad (4.98)$$

mit $A^* \in \mathbb{R}^{d_l}$ immer lösbar. Dann ist aber auch (4.91) lösbar und somit die Menge der durch die Raummodifikation gegebenen FFD-Funktionen im Punkt x k -flexibel.

□

Lemma 4.10. *Die durch Definition 4.9 gegebene Raummodifikation E_F ist konvex.*

Beweis. Sei $\mathcal{Z} = \mathfrak{P}(\Omega)$, dann ist die Menge der zulässigen FFD-Funktionen gegeben durch die Menge aller FFD-Funktionen. Da $E_F(B)$ eine Basis von $\Psi_{\mathcal{Z}}(\Omega)$ ist, ist somit jedes $A \in \mathbb{R}^{2n}$ da jedes A die Restriktion ν_F einhält zulässig. Insbesondere ist jedes $A \in \tilde{\mathcal{A}}$ zulässig, diese Menge ist aber konvex. □

Lemma 4.11. *Die durch Definition 4.9 gegebene Raummodifikation E_F ist normiert mit $w(x) = 1$ für alle $x \in \Omega$.*

Beweis. Es gilt

$$E_{\text{inj}}([w_{\gamma,\sigma,1}^k(x)B(x), \dots, w_{\gamma,\sigma,d-d_v}^k(x)B(x)], \Pi^{d-d_v}\mathcal{A}) \quad (4.99)$$

$$= ([w_{\gamma,\sigma,1}^k(x)B(x), \dots, w_{\gamma,\sigma,d-d_v}^k(x)B(x)], \tilde{\mathcal{A}}) \quad (4.100)$$

für alle $x \in \Omega$. Sei $l := d - d_v$, aus $w_{\gamma,\sigma,i}^k \leq l^{-1}$ folgt

$$\|b_j^*\|_{\infty,\Omega} \leq \sum_{i=1}^l \|w_{\gamma,\sigma,i}^k\|_{\infty,\Omega} \|b_j\|_{\infty,\Omega} \quad (4.101)$$

$$\leq l \frac{1}{l} \|b_j\|_{\infty,\Omega} \quad (4.102)$$

$$= \|b_j\|_{\infty,\Omega} \quad (4.103)$$

für jedes $b_j \in B$ und $b_j^* = \sum_{i=1}^l w_{\gamma,\sigma,i}^k b_j$. Damit ist Bedingung (4.5) erfüllt.

Es gilt, $m_{\tilde{B}} = l \cdot \dim(B)$ und

$$\max_{A \in \tilde{\mathcal{A}}} \|A\|_{\infty,\Omega} \leq l^{-1} \max_{A \in \Pi^{d-d_v}\mathcal{A}} \|A\|_{\infty,\Omega} \quad (4.104)$$

da E_{inj} normiert ist, folgt

$$m_{\tilde{B}} \max_{A \in \tilde{\mathcal{A}}} \|A\|_{\infty,\Omega} \leq \max_{A \in \Pi^{d-d_v}\mathcal{A}} \|A\|_{\infty,\Omega}. \quad (4.105)$$

Damit ist Bedingung (4.7) erfüllt.

Als letztes muss die Bedingung (4.6) überprüft werden. Es gilt

$$J(b_i^*) = \sum_{j=1}^l (\nabla w_{\gamma,\sigma,j}^k b_i + w_{\gamma,\sigma,j}^k J_i) \quad (4.106)$$

Da $\|w_{\gamma,\sigma,j}^k\|_{\infty,\Omega} \leq (2l)^{-1}$ und $\|\nabla w_{\gamma,\sigma}^k\|_{\infty} \leq \gamma$ gilt, folgt

$$\|J(b_i^*)\|_{\infty,\Omega} \leq \sum_{j=1}^l \|(\nabla w_{\gamma,\sigma,j}^k\|_{\infty,\Omega} \cdot \|b_i\|_{\infty,\Omega} + w_{\gamma,\sigma,j}^k\|_{\infty,\Omega} \cdot \|J_i\|_{\infty,\Omega})\| \quad (4.107)$$

$$\leq l \left(\frac{1}{2l} \max_k \frac{\|J_k\|_{\infty,\Omega}}{\max_j \|b_j\|_{\infty,\Omega}} \|b_i\|_{\infty,\Omega} + \frac{1}{2l} \|J_i\|_{\infty,\Omega} \right) \quad (4.108)$$

$$\leq 1/2 \max_k \|J_k\|_{\infty,\Omega} + 1/2 \|J_i\|_{\infty,\Omega} \quad (4.109)$$

$$\leq \max_k \|J_k\|_{\infty,\Omega} \quad (4.110)$$

für alle b_i . Damit ist auch Bedingung (4.6) erfüllt. \square

Nachdem für die Raummodifikation E_F die drei Eigenschaften gezeigt wurden, können wir den folgenden Satz angeben.

Theorem 4.3. *Die durch Definition 4.9 gegebene Raummodifikation E_F ist ein Erweiterungsoperator.*

4.2.3 FIXIERTE RICHTUNGEN

Nachstehend werden noch Ideen zu weiteren geometrischen Restriktionen aufgeführt. So ist es mit den Fixierungen ebenfalls möglich, nur eine oder mehrere Raumkomponenten zu fixieren. Eine Möglichkeit zur Integration solcher Restriktionen bieten Gewichtsmatrizen. Eine Gewichtsmatrix ist gegeben durch eine Funktion

$$W: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}. \quad (4.111)$$

Sie wird genauso wie die Gewichtsfunktionen für die Raummodifikationen vor den Basisfunktionen B verwendet. Die Eigenschaften der Gewichtsmatrix leiten sich aus den Eigenschaften der verwendeten Gewichtsfunktionen ab.

Beispiel 4.13. Die Fixierung von nur der dritten Raumkomponente auf einer Ebene wäre dann durch

$$E_H(B, \mathcal{A}) := (W_3 B, \mathcal{A}) \quad (4.112)$$

mit

$$W_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & w_{\gamma, \sigma}^k \end{pmatrix} \quad (4.113)$$

gegeben.

In einigen geometrischen Problemen sind Punkte eines zu optimierenden geometrischen Objekts nicht in jede Raumrichtung veränderbar.

Beispiele 4.14. Betrachtet man zum Beispiel eine an einer Wand befestigte horizontale Stange. Der Ansatzpunkt der Stange an die Wand ist nur in vertikaler Richtung variabel.

Sei v eine Kaffeetasse und u ein Henkel, der an der Kaffeetasse befestigt sein soll. Dann ist eine Deformation von u zulässig, falls der Henkel weiterhin an der Tasse befestigt ist, sich also entlang der Tasse bewegt.

Solche Bedingungen werden als *fixierte Richtungen* bezeichnet. Die formale Definition ist wie folgt gegeben.

Definition 4.10. Sei $u \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein geometrisches Objekt und $p \in u$ ein Punkt. p heißt richtungsfixiert vom Grad d_f falls für jedes $\psi \in \Psi_{\mathcal{Z}}(\Omega)$ ein $\lambda \in \mathbb{R}^{d_f}$ und d_f linear unabhängige Vektoren v_i existieren, mit

$$\psi(p) = p + \sum_{i=1}^{d_f} v_i \lambda_i. \quad (4.114)$$

Insbesondere ist also eine Fixierung eines Punktes eine Richtungsfixierung vom Grad 0. Die Raummodifikation zu einer Richtungsfixierung wird mit einer Gewichtsmatrix konstruiert. Dabei werden für die Gewichtsmatrix die Richtungsvektoren v_i , mit einer Gewichtung w_{γ}^k verwendet. Die Gewichtsmatrix ist dann durch

$$W := [s(v_1 - e_1) + e_1, \dots, s(v_{d_f} - e_{d_f}) + e_{d_f}, w_{\gamma, \sigma}^k e_{d_f+1}, \dots, w_{\gamma, \sigma}^k e_d] \quad (4.115)$$

mit $s := \gamma^{-1}(\gamma - w_{\gamma, \sigma}^k)$ gegeben.

5 OPTIMIERUNG

Um später FFD-Optimierungsalgorithmen angeben zu können, werden in diesem Kapitel Grundlagen der nichtlinearen restringierten Optimierung angegeben. Dabei werden nichtlineare Optimierungsverfahren, wie das Newtonverfahren im nichtrestringierten Fall, sowie Verfahren für restringierte Optimierungsprobleme betrachtet. In diesem Kapitel soll eine Übersicht über gängige Optimierungsverfahren gegeben werden. Für mehr Details sei auf [CGToo], [GK99], [GKo2] und [Spe93] verwiesen.

Wir beginnen mit der Optimierung ohne Nebenbedingungen, um einen Einstieg in die Optimierungsverfahren zu bekommen. Anschließend werden Optimierungsverfahren für Probleme mit Nebenbedingungen betrachtet.

5.1 OPTIMIERUNG OHNE NEBENBEDINGUNGEN

GRUNDLAGEN

Bei der Optimierung ohne Nebenbedingungen werden stetig differenzierbare Zielfunktionen $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ und das nicht restringierte Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) \tag{5.1}$$

betrachtet. Weiter sei der Gradient $\nabla f(x)$ bekannt. Bevor die verschiedenen Algorithmen zu diesem Problem betrachtet werden, werden notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen für ein lokales Minimum angegeben.

Man betrachtet einen Punkt $x^* \in \mathbb{R}^n$. Eine *notwendige* Bedingung dafür, dass x^* ein lokales Minimum bzgl. f ist, ist durch

$$\nabla f(x^*) = 0 \tag{5.2}$$

gegeben. Ein solcher Punkt x^* mit $\nabla f(x^*) = 0$ wird im folgenden als *stationärer* Punkt bezeichnet. Allerdings folgt aus $\nabla f(x^*) = 0$ nicht, dass x^* ein

lokales Minimum ist. Vielmehr gilt Gleichung (5.2) auch in Sattelpunkten und Maxima und ist damit keine hinreichende Bedingung für ein lokales Minimum. Die Bedingung, dass der Gradient der Zielfunktion gleich Null ist, wird als notwendige Bedingung erster Ordnung bezeichnet. Es ist möglich, Bedingungen höherer Ordnung anzugeben. Eine notwendige Bedingung zweiter Ordnung für ein lokales Minimum ist erfüllt, falls die Bedingung erster Ordnung erfüllt ist und die Hessematrix $\nabla^2 f$ von f in einem stationären Punkt positiv semidefinit ist, also

$$s^T \nabla^2 f(x^*) s \geq 0 \quad (5.3)$$

für alle $s \in \mathbb{R}^d$ gilt. Diese Bedingung ist ebenfalls nur notwendig, nicht hinreichend.

Nachdem notwendige Bedingungen für ein lokales Minimum aufgezeigt wurden, werden nun *hinreichende* Bedingungen angegeben. Eine hinreichende Bedingung zweiter Ordnung für ein lokales Minimum im Punkt x^* ist gegeben falls die Hessematrix im Punkt x^* positiv definit ist, also

$$s^T \nabla^2 f(x^*) s > 0 \quad (5.4)$$

für alle $s \in \mathbb{R}^d, s \neq 0$ und $\nabla f(x^*) = 0$ gilt. Dies ist aber keine notwendige Bedingung, da es lokale Minima gibt, für die die Gleichung (5.4) nicht erfüllt ist.

OPTIMIERUNGSVERFAHREN

Bei den Lineearchverfahren wird erst eine Abstiegsrichtung und danach eine Schrittweite bestimmt. Bei den Trust-Region-Verfahren wird versucht, die Zielfunktion in einer kleinen Umgebung, der sogenannten Trust-Region, des aktuellen Punktes quadratisch zu approximieren und anschließend wird das lokale Minimum der zur Approximation verwendeten Funktion auf der Umgebung bestimmt. Wir beschäftigen uns hier hauptsächlich mit ersteren, letztere sind ausführlich in [CGToo] aufgeführt.

Im Folgenden werden Lineearchalgorithmen zum Lösen von Optimierungsproblemen ohne Nebenbedingungen betrachtet. Diese Verfahren sind sogenann-

te *Abstiegsverfahren*. Das heißt, ausgehend von einem Punkt x_k wird eine Abstiegsrichtung s_k bestimmt, dabei sollte

$$\nabla f(x_k)s_k < 0 \quad (5.5)$$

gelten. Anschließend wird eine Schrittweite $\sigma_k > 0$ so gewählt, dass ein Abstieg, also

$$f(x_k) > f(x_k + s_k\sigma_k) \quad (5.6)$$

erreicht wird.

Das einfachste Linearsuchverfahren ist das Gradientenverfahren, für dieses wird als Suchrichtung s_k die Richtung des steilsten Abstiegs verwendet, welche durch den negativen Gradienten gegeben ist, also

$$s_k = -\nabla f(x_k). \quad (5.7)$$

Es bleibt also noch die Wahl einer Schrittweite. Die beste Wahl ist durch

$$\sigma_k = \operatorname{argmin}_{\sigma > 0} f(x_k + \sigma s_k) \quad (5.8)$$

gegeben, allerdings führt dies zu einem neuen Optimierungsproblem und damit zu einer unter Umständen aufwendigen Schrittweitenbestimmung. Um effiziente Optimierungsalgorithmen zu erhalten, wird eine einfache aber hinreichend gute Wahl von σ_k benötigt. Eine effiziente Möglichkeit bietet die Schrittweitenregel von Armijo. Dazu wird ein $\beta \in (0, 1)$ (meist $\beta = 1/2$) und $\gamma \in (0, 1)$ (meist $\gamma \in [10^{-3}, 10^{-2}]$) fest gewählt und ausgehend von $\sigma_k = 1$ wird überprüft ob

$$f(x_k) - f(x_k + \sigma_k s_k) \geq -\gamma \sigma_k \nabla f(x_k)^T s_k \quad (5.9)$$

gilt. Falls die Ungleichung (5.9) nicht erfüllt ist, wird $\sigma_k := \beta \sigma_k$ gewählt und die Ungleichung erneut überprüft. Dies wird wiederholt bis die Ungleichung (5.9) gültig ist. Das erste σ_k für das die Ungleichung erfüllt ist, ist die Armijo Schrittweite. Mit der Armijo Schrittweite und der Abstiegsrichtung des steilsten Abstiegs hat man ein Verfahren erhalten, für das gezeigt werden kann, dass jeder Häufungspunkt ein stationärer Punkt ist. Der Nachteil des Gradientenverfahrens ist, dass es unter Umständen nur eine geringe Konvergenzgeschwindigkeit hat.

Algorithmus 1 (Verfahren des steilsten Abstiegs):**Schritt 0: Initialisierung.**

- $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$
- Startpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^d$ und Konstanten $\beta \in (0, 1), \gamma \in (0, 1)$.

Schritt 1: Überprüfen der Abbruchbedingung.

- Falls $\nabla f(x_k) = 0$ gilt, ist ein stationärer Punkt erreicht. Der Algorithmus wird beendet mit dem Ergebnis x_k .

Schritt 2: Berechnen des Schritts.

- Setze $s_k := -\nabla f(x_k)$.

Schritt 3: Bestimmen der Schrittweite.

- Bestimme die Schrittweite σ_k mit der Armijo-Regel.

Schritt 4: Update.

- Setze $x_{k+1} := x_k + s_k$, $k := k + 1$ und gehe zu **Schritt 1**.

Bemerkung 5.1. Die Abbruchbedingung $\nabla f(x_k) = 0$ in Schritt 1 führt meist zu keinem Abbruch, da aufgrund von Rundungsfehlern die Bedingung nicht erfüllt werden kann. Deswegen wird in der Praxis Schritt 1 ersetzt durch $\|\nabla f(x_k)\| < \epsilon$ mit einem zuvor gewählten $\epsilon > 0$.

Nachdem nun mit der Armijoregel eine Schrittweitenbestimmung angegeben wurde, wenden wir uns dem Newtonverfahren zu. Aufgrund der hohen Konvergenzgeschwindigkeit, es konvergiert lokal quadratisch, ist das Newtonverfahren eines der wichtigsten Verfahren in der Numerik. Allerdings wird es meist als Basis verwendet und oft leicht abgeändert, da die Hessematrix oft nicht einfach zu bestimmen ist. Sei $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann ist das Newtonverfahren gegeben durch den nachstehenden Algorithmus.

Algorithmus 2 (Lokales Newton-Verfahren):**Schritt 0: Initialisierung.**

- $f \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$
- Startpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^d$.

Schritt 1: Überprüfen der Abbruchbedingung.

- Falls $\nabla f(x_k) = 0$ gilt, ist stationärer Punkt erreicht. Der Algorithmus wird beendet mit dem Ergebnis x_k .

Schritt 2: Berechnen der Schritttrichtung.

- Der Newtonschritt s_k ist gegeben als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\nabla^2 f(x_k) s_k = -\nabla f(x_k). \quad (5.10)$$

Schritt 3: Bestimmen der Schrittweite.

- Bestimme die Schrittweite σ_k mit der Armijo-Regel.

Schritt 4: Update.

- Setze $x_{k+1} := x_k + s_k$, $k := k + 1$ und gehe zu **Schritt 1**.

Die Konvergenz des Newtonverfahrens ist aber stark vom Startpunkt abhängig. Für ungünstige Startpunkte, meist solche die weit von lokalen Minima entfernt liegen, konvergiert das Newtonverfahren langsam.

Da es aber wichtig ist, dass das Verfahren auch global konvergiert, ändert man das Verfahren entsprechend. Dazu trifft man die folgenden Überlegungen. Man will das Verfahren in kleinen Umgebungen von Minima beibehalten, da die Konvergenzgeschwindigkeit hier hoch ist. Gleichzeitig muss man das Verfahren außerhalb dieser Umgebungen so abändern, dass es für jeden Startpunkt konvergiert. Um dies zu erreichen, müssen zwei Dinge erfüllt werden.

Zum einen muss man sicherstellen, dass s_k eine zulässige Abstiegsrichtung ist und zum anderen muss σ_k eine zulässige Schrittweite sein. Um die lokal quadratische Konvergenz beizubehalten muss man weiter sicherstellen, dass falls x_k in der Nähe einer Lösung x^* liegt, für s_k der Newtonschritt gewählt wird. Ein Algorithmus, der diese Dinge vereint, ist durch das globalisierte Newtonverfahren (Algorithmus 3) gegeben.

Eine einfache, aber häufig verwendete Wahl von B_k ist $B_k = I$. Falls f zweimal stetig differenzierbar, die Niveaumenge $N_f(x_0)$ (siehe Definition 2.11) kompakt ist und Algorithmus 3 nicht terminiert, dann sind die Suchrichtungen und Schrittweiten zulässig und der Algorithmus konvergiert gegen einen stationären Punkt. Das Verfahren konvergiert global linear und lokal quadratisch. Es gibt eine Reihe weiterer newtonartiger Verfahren, die man erhält, indem man den Newtonschritt (5.13) durch

$$M_k s_k = -\nabla f(x_k) \quad (5.11)$$

mit einer nicht singulären Matrix M_k ersetzt. Der Vorteil dieser Substitution besteht darin, dass es nicht nötig ist die Hessematrix $\nabla^2 f(x_k)$ zu berechnen. Dies führt zu einer schnelleren Bestimmung der Suchrichtung s_k . Falls man $M_k \approx \nabla^2 f(x_k)$ setzt, so erhält man die Näherung eines Newtonschritts. Bedenkt man, dass in den meisten Fällen selbst bei leicht zu berechnender Hessematrix eine exakte Bestimmung von s_k^N nicht möglich ist, sondern meist durch iterative Gleichungslöser eine Näherung der Lösung bestimmt wird, so ist die Wahl $M_k \approx \nabla^2 f(x_k)$ eine sinnvolle Näherung an den Newtonschritt. Die Globalisierung dieser Verfahren kann analog zur Globalisierung des Newtonverfahrens behandelt werden.

Eine weitere Möglichkeit für newtonartige Verfahren ist die Verwendung von quasi-newtonartigen Verfahren. Dabei wird kein festes M_k verwendet, sondern man startet mit einem $H_0 \in \mathbb{R}^{d \times d} \approx \nabla^2 f(x_0)$ und führt in jedem Schritt ein Update von H_k aus, so dass

$$H_{k+1}(x_{k+1} - x_k) = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) \quad (5.12)$$

gilt. Wichtige Update Regeln sind die SR1-, DFP-, BFGS- und PSB-Updates.

Algorithmus 3 (Globalisiertes Newton-Verfahren):**Schritt 0: Initialisierung.**

- $f \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$
- Wähle Startpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^d$ und Konstanten $\gamma \in (0, 1/2)$, $c_1 \in (0, 1)$ und $p > 0$.

Schritt 1: Überprüfen der Abbruchbedingung.

- Falls $\nabla f(x_k) = 0$ gilt, ist ein stationärer Punkt erreicht. Der Algorithmus wird beendet mit dem Ergebnis x_k .

Schritt 2: Berechnen der Schritttrichtung.

- Der Newtonschritt s_k^N ist gegeben als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\nabla^2 f(x_k) s_k^N = -\nabla f(x_k).$$

Falls s_k^N zu berechnen ist, und

$$-\nabla f(x_k)^T s_k^N \geq \min\{c_1, c_2 \|\nabla f(x_k)\|^p\} \|\nabla f(x_k)\| \|s_k^N\|$$

gilt, so setzt man $s_k := s_k^N$.

- Sonst wählt man eine symmetrisch positiv definite Matrix $B_k \in \mathbb{R}^{d \times d}$, so dass $\lambda_{\min}(B_k) \geq \eta$, $\lambda_{\max}(B_k) \leq \nu$ mit von k unabhängigen Konstanten $0 < \eta < \nu$. Dann ist s_k gegeben als Lösung von

$$B_k s_k = -\nabla f(x_k)$$

Schritt 3: Bestimmen der Schrittweite.

- Bestimme die Schrittweite σ_k mit der Armijo-Regel.

Schritt 4: Update.

- Setze $x_{k+1} := x_k + s_k$, $k := k + 1$ und gehe zu **Schritt 1**.

5.2 OPTIMIERUNG MIT NEBENBEDINGUNGEN

Nachdem wir uns nun mit den nicht-restringierten Verfahren eingehend beschäftigt haben, wenden wir uns den restringierten Verfahren zu. Zwar wurde in Kapitel 4 mit der Raummodifikation ein Verfahren angegeben, mit dem es möglich ist, Nebenbedingungen in die Basis zu integrieren, allerdings ist dies nicht immer möglich, zum Beispiel bei nicht geometrischen Nebenbedingungen. Aus diesem Grund wird ein Verfahren zur Optimierung mit Nebenbedingungen angegeben.

Im Folgenden betrachtet man das Optimierungsprobleme aus Kapitel 2.2.

$$NLO \left\{ \begin{array}{l} \text{Sei } \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d, \mathcal{D} \text{ offen,} \\ f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \\ h: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}, g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{m_2} \\ \mathcal{Z} := \{x \in \mathcal{D} \mid h(x) = 0, g(x) \geq 0\} \\ \text{Gesucht:} \\ x^* = \operatorname{argmin}\{f(x) \mid x \in \mathcal{Z}\}. \end{array} \right. \quad (5.13)$$

mit $f, g, h \in C^1(\mathcal{D})$ und \mathcal{Z} abgeschlossen in \mathbb{R}^d .

Zur Lösung solcher Optimierungsprobleme kann ein sogenanntes *Penalty-Verfahren* verwendet werden. Die Idee der Penalty-Verfahren ist, eine normale nicht restringierte Optimierung durchzuführen, aber den Wert des Zielfunktions durch einen gewichteten Strafterm bei der Nichteinhaltung der Nebenbedingungen zu bestrafen. Dabei beginnt man mit einem kleinen Gewicht und bestimmt eine Lösung des nicht restringierten Problems. Ausgehend von dieser Lösung erhöht man sukzessive den Strafterm, um die Nichteinhaltung der Restriktion weiter zu bestrafen.

Ein solches Problem ist gegeben durch

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} P_p(x) \quad (5.14)$$

mit

$$P_p(x) := f(x) + pS(x), \quad (5.15)$$

wobei p der *Penalty-Parameter* das Gewicht des Strafterms und S die Penalty-Funktion ist. Der Vorteil dieses Verfahrens ist, dass man schon bekannte Optimierungsalgorithmen für nichtrestringierte Probleme verwenden kann und so der zusätzliche Aufwand gering ist. Des weiteren erhält man für jede Iteration einen guten Startpunkt und bei hohen Gewichten für die Penalty-Funktion und damit schwierig zu lösenden Optimierungsproblemen ist ein solcher Startpunkt sehr wichtig. In den meisten Fällen verwendet man aus diesem Grund monoton wachsende Folgen von (p_k) . Es bleibt das Problem, eine sinnvolle Penalty-Funktion zu konstruieren.

Wir wollen kurz ein häufig verwendetes Penalty-Verfahren mit einer quadratischen Penalty-Funktion angeben. Die Penalty-Funktion S wird wie folgt definiert:

$$S(x) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m_1} \max\{0, g_i(x)\}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m_2} h_j(x)^2 \quad (5.16)$$

$$= \frac{1}{2} (\|(g(x))_+\|^2 + \|h(x)\|^2). \quad (5.17)$$

Dabei ist $(y)_+ = (\max\{0, y_i\})_{1 \leq i \leq n}$ für einen Vektor $y \in \mathbb{R}^d$. Der Strafterm, beziehungsweise beide Summanden des Strafterms sind so konstruiert, dass sie an zulässigen Punkten verschwinden. Das heißt, falls $x \in \mathcal{Z}$ gilt, so gilt $P_p(x) = f(x)$. Darüber hinaus gilt aufgrund der Glattheit des Strafterms auch $\nabla P_p(x) = \nabla f(x)$. Deswegen besteht für zulässige Punkte kein Unterschied zwischen der Zielfunktion des Penalty-Verfahrens und der eigentlichen Zielfunktion. Folglich ist ein stationärer Punkt des Penaltyproblems auch ein stationärer des Ausgangsproblems und erfüllt damit für beide Probleme die notwendigen Bedingungen für ein Minimum.

Diese Eigenschaft ist allerdings nicht nur von Vorteil. Da der Strafterm in der Nähe des zulässigen Bereiches aufgrund der Glattheit nur sehr langsam wächst, ist ein lokales Minimum von P_p nur dann in \mathcal{Z} enthalten, falls im Minimum $\nabla P_p = 0$ gilt. Dies führt dazu, dass die Penalty-Verfahren sich meist dem zulässigen Bereich von außen nähern und die Folge erst für $p \rightarrow \infty$ zulässige Lösungen enthält. Verfahren, die sicherstellen, dass die gefunden Lösungen zulässig sind, werden innere-Punkte-Verfahren genannt.

Algorithmus 4 ist ein Beispiel zu einem solchen Verfahren. Falls f, g und h stetig sind und $\mathcal{Z} \neq \emptyset$ gilt, folgt für $p_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} \infty$, dass jeder Häufungspunkt von (x_k) eine globale Lösung des restringierten Optimierungsproblems ist.

Algorithmus 4 (Penalty-Verfahren):**Schritt 0: Initialisierung.**

- Wähle einen Penalty Parameter $p_0 > 0$ und setze $k := 0$.

Schritt 1: Lösen des Penalty-Problems.

- Bestimme die globale Lösung des nichtrestringierten Problems

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} P_{p_k}(x)$$

mit dem Startpunkt x_{k-1} , falls $k > 0$, sonst x_0 .

Schritt 2: Überprüfen der Zulässigkeit.

- Falls $x_k \in \mathcal{Z}$ und $\nabla f(x_k) = 0$ wird der Algorithmus beendet, Ergebnis ist x_k .

Schritt 4: Update.

- Wähle $p_{k+1} > p_k$.
- Setze $k := k + 1$ und gehe zu **Schritt 2**.

5.3 GRADIENTENFREIE OPTIMIERUNG

Es gibt Probleme, in denen sich der Gradient der Zielfunktion f nicht oder nur mit sehr hohem Aufwand bestimmen lässt. Für solche Probleme existieren Optimierungsverfahren, die *ohne* den Gradienten der Zielfunktion auskommen. Typischerweise ist gerade bei solchen Problemen eine niedrige Zahl von Optimierungsparametern besonders wichtig, da die Auswertung der Zielfunktion oft ebenfalls einen hohen Aufwand erfordert. Da sich die FFD-Verfahren durch eine starke Reduktion der Optimierungsparameter auszeichnen, wird ein gradientenfreies Optimierungsverfahren vorgestellt.

Algorithmus 5 (Modified-Controlled-Random-Search-Algorithmus):**Schritt 0: Initialisierung.**

- Wähle eine gleichmäßig verteilte Zufallsvariable Y und \mathcal{P} bestehend aus l zufällig gewählten Punkten aus \mathcal{Z} .

Schritt 1: Abbruchbedingung.

- Falls $f(x_{\max}) - f(x_{\min}) \leq \epsilon$ dann wird der Algorithmus beendet, Ergebnis ist x_{\min} .

Schritt 2: Reflexion.

- Wähle zufällig $d + 1$ Punkte aus \mathcal{P} .
- Berechne

$$x = M - Y(x_i - M)$$

- Falls $x \notin \mathcal{Z}$ wiederhole Schritt 2.

Schritt 4: Update.

- Falls $f(x) < f(x_{\max})$, dann setze $x_{\max} := x$.
- Gehe zu Schritt 1.

Wir geben an dieser Stelle einen *Random-Search-Algorithmus* an. Eine Übersicht über Random-Search-Algorithmen erhält man in [TZ86]. Die Idee der Kontrollierten-Random-Search Algorithmen ist wie folgt:

Sei \mathcal{P} eine Menge von $l \gg d$ zulässigen Punkten, $x_1, \dots, x_l \in \mathcal{Z}$. Diese bilden einen Polyeder S im \mathbb{R}^d mit den Ecken x_i . Um einen neuen Punkt zu erhalten, berechnet man

$$x = M - Y(x_i - M), \quad (5.18)$$

wobei M der Schwerpunkt der durch die restlichen $l - 1$ Ecken gegebenen Oberfläche ist. Der multiplikative Faktor Y ist eine Zufallsvariable, die meist als gleichmässig verteilt in $[0, \alpha)$ mit $\alpha \in [4, 8]$ gewählt wird. Nachdem der neue

Punkt x berechnet wurde, wird der Funktionswert des neuen Punktes mit dem größten Funktionswert der Ecken verglichen. Sei also x_{\max} die Ecke mit dem größten Funktionswert, falls

$$f(x) < f(x_{\max}) \quad (5.19)$$

gilt, so wird x_{\max} durch den neuen Punkt x ersetzt. Dieses Vorgehen führt zu Algorithmus 5.

6 ALGORITHMEN

In diesem Kapitel werden die verschiedenen FFD-Algorithmen abstrakt formuliert. Dies geschieht sowohl für die FFD-Algorithmen für geometrische Objekte als auch für die Kontrollparameter von parametrisierten geometrischen Objekten. Die hier vorgestellten Algorithmen arbeiten als ein Zusatzmodul für bereits existierende nichtlineare Optimierungsverfahren. Solche Optimierungsverfahren sind in Kapitel 5 angegeben.

Die Algorithmen zur FFD-Optimierung existieren sowohl als lokal zulässige und als global zulässige FFD-Algorithmen. In beiden Versionen der Algorithmen steht an erster Stelle die Wahl einer geeigneten Basis eines finiten FFD-Raumes. Anschließend unterscheiden sich die Versionen der Algorithmen. Bei *global* zulässigen Verfahren ist der nächste Schritt des Algorithmus durch die Generierung einer Reihe von Raummodifikationen zu den Nebenbedingungen gegeben. Dabei wird auch die nötige Zahl von Freiheitsgraden für das global zulässige Verfahren festgelegt. Beide Schritte werden nur ein einziges Mal zu Beginn des global zulässigen Algorithmus durchgeführt. Bei den *lokal* zulässigen Verfahren entfällt der Schritt zur Bestimmung einer flexiblen Basis. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist durch die Dimension der Basis fest vorgegeben.

Die Entscheidung, ob ein lokal oder global zulässiges Verfahren verwendet werden soll, hängt von mehreren Faktoren ab. Ein *lokal* zulässiges Verfahren ist geeignet, wenn die Anzahl der Nebenbedingungen klein gegen die Anzahl der Freiheitsgrade ist, die Nebenbedingungen einfach zu überprüfen sind und eine Integration der Nebenbedingungen durch eine flexible Raummodifikation nur mit einer deutlich höheren Zahl von Freiheitsgraden möglich ist. *Global* zulässige Verfahren eignen sich hingegen besonders gut, wenn viele Nebenbedingungen von ähnlicher Struktur sind und sie leicht in flexible Raummodifikationen umzusetzen sind.

Da es sich bei den FFD-Algorithmen um Zusatzmodule von bestehenden Op-

timierungsalgorithmen handelt, sind sie nicht als eigenständige Optimierungsalgorithmen anzusehen. In den FFD-Algorithmen wird aus diesem Grund auf einen Optimierungsalgorithmus Opt verwiesen, zum Beispiel das globalisierte Newtonverfahren (siehe Algorithmus 3). Dieser wird von dem FFD-Algorithmus aufgerufen, um die neue Suchrichtung und eine neue Schrittweite zu bestimmen. Die Schnittstellen zu den FFD-Algorithmen beschränken sich auf wenige Daten und können so an (fast) jedes Optimierungsverfahren einfach angepasst werden. Für komplexe Optimierungsverfahren ist es durchaus möglich, dass die Schnittstellen noch erweitert werden müssen.

6.1 FFD-ALGORITHMEN

Als Erstes werden Algorithmen ohne in die Basis integrierte Nebenbedingungen betrachtet, da für diese Verfahren keine Raummodifikationen vorgenommen werden müssen. Da die Nebenbedingungen nicht in die Basis integriert werden, ist nicht sichergestellt, dass ein zulässiges geometrisches Objekt u auf ein ebenfalls zulässiges geometrisches Objekt $\varphi_A(u)$ abgebildet wird. Die Einhaltung der Nebenbedingungen wird durch ein Optimierungsverfahren mit Nebenbedingungen $OptNb$ sichergestellt (z.Bsp. ein Penalty-Verfahren, siehe Algorithmus 4) wobei der Aufruf des Verfahrens nur eine Richtung gegeben durch A liefert. Die zur Überprüfung der Schrittweite notwendige FFD-Deformation wird danach berechnet. Dies wird wiederholt bis ein stationärer Punkt erreicht ist. Der erste der FFD-Algorithmen besteht nur aus einem einzelnen FFD-Schritt, der mit Hilfe des Optimierungsverfahrens bestimmt wird.

Algorithmus 6 (FFD-Algorithmus):**Schritt 0: Initialisierung.**

Sei $\Omega := \prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$, $\Phi_{B,A}(\Omega)$ ein finiter FFD-Raum mit $\dim(B) = n$ und g, h Nebenbedingungen. Weiter sei ein geometrisches Objekt $u \in \mathcal{Z}$ gegeben und $OptR$ initialisiert.

Schritt 1: Optimierungsphase.

- Falls A ein stationärer Punkt ist, wird der Algorithmus mit dem Ergebnis \tilde{u} beendet.
- Sonst
 - Anhand von \tilde{u} werden die Freiheitsgrade A bestimmt.

$$A := OptNb(\tilde{u}, g, h)$$

Schritt 2: Berechnung der geometrischen Deformation.

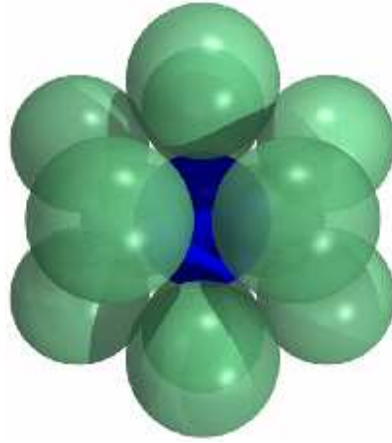
- Das neue geometrische Objekt \tilde{u} ist gegeben durch

$$\tilde{u} := u + B(u) \cdot A^T$$

- Gehe zu **Schritt 1**.

Das Verfahren eignet sich, falls die Anzahl der Nebenbedingungen klein gegen die Dimension der Basis ist. Falls die Zahl der (aktiven) Nebenbedingungen gleich oder größer der Dimension der Basis ist, ist nicht mit einer Verbesserung des geometrischen Objekts bezüglich der Zielfunktion zu rechnen. Für solche Probleme sind iterierte FFD-Algorithmen mit flexiblen Raummodifikationen zu bevorzugen. Es ist zwar auch möglich, den lokal zulässigen Einzelschritt-Algorithmus global zulässig anzugeben, allerdings ist es im Allgemeinen sinnvoller, sogleich iterierte Verfahren zu betrachten. Bevor diese Verfahren angegeben werden, wenden wir uns der Optimierung von Kontrollparametern geometrischer Objekte zu.

Falls es sich bei dem geometrischen Objekt um ein parametrisiertes geome-

Abbildung 6.1: Kissing Number im \mathbb{R}^3

trisches Objekt handelt, so geschieht die Optimierung über die Parameter des geometrischen Objekts. Sei u ein geometrisches Objekt und $P \subseteq \Omega_P \subseteq \mathbb{R}^m$ das geometrische Objekt, bestehend aus den Parametern $p_i \in \mathbb{R}^m$ mit $\Gamma(P_u) = u$. Der Algorithmus kann nun auf die Parameter des geometrischen Objekts angewendet werden. Da die Nebenbedingungen im Raum des geometrischen Objekts u formuliert sind, müssen nach jedem FFD-Schritt ψ die Nebenbedingungen für das deformierte geometrische Objekt $\tilde{u} := \Gamma(\psi(P))$ überprüft werden. Desweiteren muss eine finite FFD-Basis zu dem, das geometrische Objekt P umgebenden Raum Ω_P , bestimmt werden. Dabei ist zu beachten, dass aus $u \subseteq \Omega_u \subseteq \mathbb{R}^d$ nicht $\Omega_P \subseteq \mathbb{R}^d$ folgt. Das heißt, dass Ω_P eine höhere oder niedrigere Dimension als Ω_u besitzen kann. Insbesondere gilt im folgenden Beispiel $\dim(\Omega_P) < \dim(\Omega_u)$.

Beispiel 6.1 (Kissing Number). *Das Problem der Kissing Number ist ein Packungsproblem (siehe [Weio6],[ZT99]) und besteht darin, die maximale Anzahl k äquivalenter Hypersphären der Dimension $d - 1$ angeordnet um eine einzelne Hypersphäre anzugeben, so dass sich die Hypersphären zwar berühren, aber nicht schneiden (siehe Abbildung¹ 6.1). Offensichtlich können die Hypersphären mit $d - 1$ Parametern parametrisiert werden, da die Mittelpunkte der Sphären auf einer $d - 1$ Dimensionalen Mannigfaltigkeit liegen, also gilt $\dim(\Omega_u) - 1 = \dim(\Omega_P)$. Tabelle 6.1 gibt die bekannten Kissing Number k bezüglich der Dimension d an.*

¹Das Bild ist aus [Weio6]

d	k
1	2
2	6
3	12
4	24
5	40
\vdots	\vdots
9	≥ 306

Tabelle 6.1: Bekannte Kissing Number k der Dimension d

Für Kissing Numbers der Dimension $d > 9$ existieren nur untere Schranken.

Bemerkung 6.1. In vielen Fällen (z.B. FE-Netze, Booster Beispiel 2.3) sind die Parameter p_i Punkte im \mathbb{R}^d und es gilt $p_i \in u$. Dies erleichtert die Anpassung der Nebenbedingungen, da für eine geringe Gitterweite sich die Parameter solcher Parametrisierungen wie das beschriebene geometrische Objekt u verhalten. Diese Fälle sind besonders günstig für die Optimierung mit FFD-Verfahren.

Da in vielen Optimierungsverfahren der Gradient und die Hessematrix zur Optimierung verwendet werden, falls diese existieren und einfach zu bestimmen sind, wird in Algorithmus 7 angegeben, wie diese berechnet werden können. Dabei sei vorausgesetzt, dass f stetig differenzierbar ist und $\nabla_x f$ bekannt ist. Der Gradient von $f(\varphi_A(x))$ ist dann gegeben durch

$$\nabla_a f(\varphi_A(x)) = \nabla_x f \cdot S \quad (6.1)$$

mit $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ und

$$S := \begin{pmatrix} \nabla_a \varphi_A(x_1) \\ \vdots \\ \nabla_a \varphi_A(x_n) \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Aufgrund der Linearität von $\varphi_A(x_i)$ in A ist die Berechnung von S eine einfache Auswertung der Basisfunktionen B an der Stelle x_i .

Algorithmus 7 (FFD-Algorithmus für param. geom. Objekte):**Schritt 0: Initialisierung.**

Sei $\Omega := \prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$, $u \subseteq \mathbb{R}^d$ ein geometrisches Objekt, $p_i \in \mathbb{R}^m, 1 \leq i \leq N$ die Parameter zu u , $A = 0$ und $\Phi_{B,A}(\Omega)$ ein finiter FFD-Raum mit $\dim(B) = m$. Weiter seien Nebenbedingungen g, h gegeben und $OptNb$ initialisiert.

Schritt 1: Berechnung von S .

- Falls der Optimierer Gradienten verwendet

$$S_{i,j} := D_{a_i} \varphi_A(p_j) = b_i(p_j).$$

Schritt 2: Optimierungsphase.

- Falls A ein stationärer Punkt ist, wird der Algorithmus mit \tilde{P} bzw. $\Gamma(\tilde{P}) = u$ beendet.
- Sonst:
 - Anhand von \tilde{P} werden die Freiheitsgrade A bestimmt

$$A := Opt(\tilde{P}, S, g, h)$$

Schritt 3: Berechnung der geometrischen Deformation.

- Das neue geometrische Objekt \tilde{P} ist gegeben durch

$$\tilde{P} := P + B(P) \cdot A.$$

- Gehe zu **Schritt 2**.

Die Berechnung der Hessematrix geschieht analog, wobei zu beachten ist, dass

$$D_{a_i} D_{a_j} x_k \equiv 0 \tag{6.3}$$

gilt, wegen der Linearität von $\varphi_A(x)$ in A . Dabei bezeichnet D_{a_i} die partielle Ableitung nach der Variablen $a_i \in A$. Damit ist die Hessematrix für zweimal

stetig differenzierbares f gegeben durch

$$[(\nabla^2 f)(\varphi_A(x))]_{i,j} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n D_{x_k} D_{x_l} f \cdot D_{a_i} x_l \cdot D_{a_j} x_k. \quad (6.4)$$

Ausgehend vom Algorithmus 6 wird nun der Algorithmus 7 für die FFD-Optimierung von parametrisierten geometrischen Objekten angegeben.

6.2 ITERIERTE GLOBAL ZULÄSSIGE FFD-ALGORITHMEN

Bei iterierten FFD-Algorithmen werden FFD-Räume mit Raummodifikationen E betrachtet. Zwar ist es auch möglich, die Algorithmen 6 und 7 zu iterieren, aber aus mehreren Gründen werden diese Verfahren nicht angegeben. Zum einen ist die Vorgehensweise bei beiden Verfahren nahezu identisch, was eine einfache Übertragung der iterierten Algorithmen zulässt. Zum anderen ist der Zeitvorteil, den die bisher betrachteten Algorithmen besitzen, bei den iterierten Verfahren nicht mehr vorhanden, da nur am Anfang eine Raummodifikation erstellt werden muss und diese in jeder Iteration verwendet werden kann. Während bei restringierten Verfahren die Freiheitsgrade der FFD-Räume an die Nebenbedingungen gekoppelt sind, entfällt bei den Verfahren mit Raummodifikationen diese Kopplung. Die Verwendung von Raummodifikationen ermöglicht es, nichtlineare Optimierungsalgorithmen ohne Nebenbedingungen zu verwenden, falls sich alle Nebenbedingungen in den Raum der FFD-Funktionen integrieren lassen. Diese Optimierungsverfahren sind, wie in Kapitel 5 angemerkt, schneller und benötigen weniger Rechenaufwand.

Um ein global zulässiges Verfahren zu erhalten, wird in der Initialisierung ausgehend von einer Menge von flexiblen FFD-Funktionen, auf einem nicht restringierten Raum eine flexibilitäts-erhaltende Raummodifikation zu den gegebenen Nebenbedingungen bestimmt. Damit ist sichergestellt, dass die Nebenbedingungen in jedem Schritt eingehalten werden und die Flexibilität nicht geringer wird. Falls alle Nebenbedingungen in den FFD-Raum integriert werden können, wird ein nichtlineares Optimierungsverfahren *Opt* verwendet (z.B. das Newtonverfahren). Können nicht alle Nebenbedingungen in eine Raummodifikation aufgenommen werden, so ist genau wie bei Algorithmus 6 ein Optimierungsverfahren mit Nebenbedingungen zu verwenden.

Algorithmus 8 (global iterierter FFD-Algorithmus):**Schritt 0: Initialisierung.**

Sei $\Omega := \prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$, $u_0 \in \mathcal{Z}$ ein geometrisches Objekt, $\mathcal{M}(B, \mathcal{A}) \subseteq \Phi_{B, \mathcal{A}}(\Omega)$ eine Menge von FFD-Funktionen und Nebenbedingungen g, h .

Schritt 1: Modifizieren von $\mathcal{M}(B, \mathcal{A})$.

- Bestimmen der Raummodifikation $E_{g,h}$ (Algorithmus 12)

$$(B, \mathcal{A}) := E_{g,h}(B, \mathcal{A}).$$

- $n := \dim(B)$, $k := 0$, $A_0 := 0$ und Opt initialisieren.

Schritt 2: Optimierungsphase.

- Falls A_k ein stationärer Punkt ist, wird der Algorithmus mit dem Ergebnis u_{k+1} beendet.
- Sonst:
 - Anhand von u_k werden die Freiheitsgrade A_{k+1} berechnet.

$$A_{k+1} := Opt(u_k)$$

- Falls $A_{k+1} \notin \mathcal{A}$ gilt, bestimme $\mu \in (0, 1)$ mit $\mu A_{k+1} \in \mathcal{A}$ und setze $A_{k+1} := \mu A_{k+1}$.

Schritt 3: Berechnung der geometrischen Deformation.

- Das neue geometrische Objekt u_{k+1} ist gegeben durch

$$u_{k+1} := u_k + B(u_k)A_{k+1}.$$

- Setze $k := k + 1$ und gehe zu **Schritt 2**.

Als Nächstes wird ausgehend von Algorithmus 8 der global iterierte Algorithmus für parametrisierte geometrische Objekte betrachtet. Genauso wie bei

der Anpassung von Algorithmus 6 auf den parametrisierten Fall (Algorithmus 7) werden die Parameter p_i als geometrisches Objekt P betrachtet. Anders als bei den allgemeinen FFD-Verfahren sind bei der Übertragung auf den parametrisierten Fall weitere Details zu beachten.

Das Problem der Optimierung im Fall eines parametrisierten geometrischen Objekts $u = \Gamma(P)$ liegt in den Nebenbedingungen g, h . Diese beziehen sich auf das geometrische Objekt u und nicht auf die Parameter $p_i \in P$. Dies führt zu neuen Nebenbedingungen $\tilde{h} = h \circ \Gamma$ und $\tilde{g} = g \circ \Gamma$. Durch diese Transformation geht in vielen Fällen die geometrische Struktur der Nebenbedingungen g und h verloren. Die neuen Nebenbedingungen \tilde{h} und \tilde{g} sind oft schwer oder gar nicht in eine Raummodifikation $E_{\tilde{g}, \tilde{h}}$ zu integrieren.

Beispiel 6.2. *Man betrachte Beispiel 2.1. Das Seil s sei durch einen kubischen B-Spline gegeben, dann bilden die Kontrollpunkte p_i der B-Splines das geometrische Objekt P . Während sich die Fixierungen an den Punkten P und Q noch einfach anhand der Kontrollpunkte realisieren lassen, kann man die Hindernisrestriktion W nicht so einfach übertragen. Denn aus $p_i \notin W$ folgt nicht, dass das Seil das Hindernis nicht durchdringt. Vor allem wenn die Kontrollpunkte weit auseinander liegen, ist der Abstand des Kontrollpolygons groß und damit ist es schwierig, Hindernisrestriktionen einzuhalten.*

Um trotzdem eine zur Optimierung geeignete Menge von finiten FFD-Funktionen zu erhalten, bietet sich das folgende Vorgehen an. Falls die Kontrollparameter p_i integrale Bestandteile des geometrischen Objektes u sind, also $p_i \in u$ gilt, und hinreichend nahe beieinander liegen, ist es sinnvoll, die Menge der finiten FFD-Funktionen zu betrachten, die aus den Nebenbedingungen an das geometrische Objekt u hervorgeht, also $\mathcal{M}(E_{g,h}(B, \mathcal{A}))$. Diese kann dann zur Optimierung des geometrischen Objektes P benutzt werden. Allerdings ist es dann notwendig, die Zulässigkeit jedes einzelnen Schrittes A_k zu überprüfen, da aufgrund der durch die Parametrisierung gemachten Approximation die globale Zulässigkeit der Menge der finiten FFD-Funktionen nicht mehr gewährleistet ist. Wird bei der Überprüfung festgestellt, dass das deformierte geometrische Objekt $u = \Gamma(\varphi_A(P))$ nicht zulässig ist, so muss die Deformation φ_A soweit gedämpft werden, bis sie zulässig ist.

Algorithmus 9 (global iterierter FFD-Algorithmus f. param. Objekte):

Schritt 0: Initialisierung.

Sei $\Omega := \prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$, $u_0 \in \mathcal{Z}$ ein geometrisches Objekt $p_i \in \mathbb{R}^m, 1 \leq i \leq N$ die Parameter zu u_0 , $\mathcal{M}(B, \mathcal{A}) \subseteq \Phi_{B, \mathcal{A}}(\Omega)$ eine Menge finiter FFD-Funktionen und Nebenbedingungen g, h .

Schritt 1: Modifizieren von $\mathcal{M}(B, \mathcal{A})$.

- Siehe Algorithmus 8.

Schritt 2: Berechnung von S .

- Falls der Optimierer Gradienten verwendet

$$S_{i,j} := D_{a_i} \psi_A(p_j) = B_i(p_j).$$

Schritt 3: Optimierungsphase.

- Falls A_k ein stationärer Punkt ist, wird der Algorithmus mit dem Ergebnis P_k bzw. $u := \Gamma(P_k)$ beendet.
- Sonst: Bestimmen von A_{k+1} durch

$$A_{k+1} := \text{Opt}(P_{k+1}, S).$$

Schritt 4: Berechnung der geometrischen Deformation.

- Das neue geometrische Objekt P_{k+1} ist gegeben durch

$$P_{k+1} := P_k + B(P_k)A_{k+1}.$$

Schritt 5: Überprüfung der Nebenbedingungen

- Falls $g(\Gamma(P_{k+1})) \geq 0$ und $h(\Gamma(P_{k+1})) = 0$, dann $\lambda = 1$, $k := k + 1$ und gehe zu **Schritt 2**.
- Sonst: $\lambda = \lambda/2$ und gehe zu **Schritt 5**.

Der Algorithmus 9 kann verwendet werden, wenn die Kontrollparameter die oben beschriebenen günstigen Eigenschaften besitzen. Falls das geometrische Objekt P für alle zulässigen Kontrollparameter in der Hausdorffmetrik stark von dem geometrischen Objekt $\Gamma(P)$ abweicht, so muss falls möglich $E_{\tilde{g}, \tilde{h}}$ bestimmt werden. Wenn dies nicht möglich ist, so ist Algorithmus 7 zu verwenden.

6.3 ADAPTIVE FFD-ALGORITHMEN

Ausgehend von den global zulässigen iterativen FFD-Algorithmen sollen im Folgenden adaptive Methoden zur Wahl der Menge der FFD-Funktionen, über die optimiert wird, aufgezeigt werden. Dazu sind verschiedene Ansätze möglich. Zum einen kann der Grad der Basis der finiten FFD-Funktionen erhöht werden, um eine bessere Approximationskraft zu erreichen oder der Träger kann verkleinert werden, um eine höhere Lokalität zu erreichen. Zum anderen ist es möglich, bei gleichbleibendem Grad der Basis die Optimierung über ein Teilgebiet von Ω durchzuführen. Dabei ist es wichtig, dass der Mehraufwand zur Bestimmung der eventuell nötigen neuen Basen möglichst gering bleibt und die Anzahl der Freiheitsgrade nicht zu stark anwächst.

Die in diesem Unterkapitel angegebenen Algorithmen beziehen sich nur auf die Optimierung von geometrischen Objekten und nicht auf die Optimierung von parametrisierten geometrischen Objekten. Es ist aber leicht, die gegebenen Algorithmen mit denselben Überlegungen wie bei Algorithmus 9 zu modifizieren und sie so auf parametrisierte geometrische Objekte anzuwenden.

6.3.1 FFD-ALGORITHMEN MIT GRADERHÖHUNG

Bei den bisher betrachteten Algorithmen wurde ausgehend von einer Basis B und zulässigen Freiheitsgraden \mathcal{A} eine Raummodifikation $E_{g,h}$ bezüglich der Nebenbedingungen g, h definiert. Mit dieser wurde ein global zulässiger FFD-Schritt des Algorithmus durchgeführt. Für den Algorithmus mit Graderhöhung, sei nun B_1, \dots, B_k eine Folge von Basen eines FFD-Raumes mit

$$\dim(B_i) \leq \dim(B_{i+1}) \quad (6.5)$$

und

$$\text{flex}(\mathcal{M}(B_i, \mathcal{A}_i)) \leq \text{flex}(\mathcal{M}(B_{i+1}, \mathcal{A}_i)). \quad (6.6)$$

Weiter bezeichne $\mathcal{M}_i := \mathcal{M}(B_i, \mathcal{A}_i)$ eine Folge von Mengen von global zulässigen finiten FFD-Funktionen zu den Basen B_i und zulässigen Freiheitsgraden \mathcal{A}_i . Sei $E_{g,h}$ eine Raummodifikation zu den Nebenbedingungen g, h . Da die Raummodifikation nicht von der Basis, sondern nur von den Nebenbedingungen g, h des geometrischen Objekts und von dem das geometrische Objekt umgebenden Raum Ω abhängt, kann sie auf alle Mengen von finiten FFD-Funktionen \mathcal{M}_i angewendet werden. Die daraus resultierenden Mengen von FFD-Funktionen

$$\widetilde{\mathcal{M}}_i := \mathcal{M}(E_{g,h}(B_i, \mathcal{A}_i)) \quad (6.7)$$

sind für alle $1 \leq i \leq k$ global zulässig. Die Raummodifikation $E_{g,h}$ muss also nur einmal zu Beginn des Algorithmus bestimmt werden.

Beispiel 6.3. *Beispiel für eine Folge von Basen B_i . Sei $d = 2$ und B_k die reine Polynombasis (siehe 3.18) zum Grad k , dann ist eine Folge von geeigneten Basen gegeben durch*

$$\begin{aligned} B_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ B_1 &= \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \\ &\vdots \\ B_k &. \end{aligned}$$

Bemerkung 6.2. *Die Bedingungen (6.5) und (6.6) sind nicht zwingend, haben sich aber in den Anwendungen als sinnvoll erwiesen. Allerdings ist es auch denkbar, abwechselnd rein quadratische und rein kubische FFD-Basen zu verwenden. Da es nicht möglich ist, durch mehrfache Iteration von quadratischen FFD-Funktionen den Raum der kubischen Polynome zu erhalten, wird zwischen beiden FFD-Räumen gewechselt. Nur kubische FFD-Funktionen zu verwenden ist ebenfalls ungünstig, da diese, im Gegensatz zu den quadratischen FFD-Funktionen, quartische Polynome nicht darstellen können.*

Algorithmus 10 (globaler FFD-Algorithmus mit Graderhöhung):**Schritt 0: Initialisierung.**

Sei $\Omega := \prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$, $u \in \mathcal{Z}$ ein geometrisches Objekt, B_0, B_1, \dots, B_k eine Folge von FFD-Basen und g, h Nebenbedingungen. Weiter sei $\gamma > 0, \gamma \in \mathbb{N}, \epsilon > 0, i := 1, k := 0, A_0 := 0$ und $\lambda := 1$.

Schritt 1: Modifizieren von $\mathcal{M}(B_i, \mathcal{A})$.

- Bestimmen der Raummodifikation $E_{g,h}$ (siehe Algorithmus 12)
- Berechnen der modifizierter FFD-Mengen $\widetilde{\mathcal{M}}_i$.
- $n_i := \dim(\widetilde{B}_i)$ und Opt initialisieren.

Schritt 2: Optimierungsphase.

- Falls A_k ein stationärer Punkt ist und $i = m$ gilt wird der Algorithmus beendet.
- Sonst:
 - Falls $k = \gamma$ oder $|f(u_{k-1}) - f(u_k)| < \epsilon$ gilt, dann setze $k := 0$, $i := i + 1, A_0 := 0$ und $u_0 := u_\gamma$.
 - Anhand von u_k werden die Freiheitsgrade A_{k+1} berechnet.

$$A_{k+1} := Opt(u_k, \widetilde{B}_i)$$

- Falls $A_{k+1} \notin \widetilde{\mathcal{A}}_i$ dann bestimme $\mu \in (0, 1)$ mit $\mu A_{k+1} \in \widetilde{\mathcal{A}}_i$ und setze $A_{k+1} := \mu A_{k+1}$.

Schritt 3: Berechnung der geometrischen Deformation.

- Das neue geometrische Objekt u_{k+1} ist gegeben durch

$$u_{k+1} := u_k + \widetilde{B}_i(u_k) A_{k+1}.$$

- Setze $k := k + 1$ und gehe zu **Schritt 2**.

Ein Wechsel der FFD-Basis ist sinnvoll, wenn bezüglich der aktuellen Men-

ge von FFD-Funktionen ein stationärer Punkt erreicht wurde oder wenn die Verbesserung des Zielfunktionals gering ist, also falls

$$|f(u_{k+1}) - f(u_k)| < \epsilon \quad (6.8)$$

für ein vorher bestimmtes $\epsilon > 0$ gilt. Da die ersten Schritte meist die größten Verbesserungen des Zielfunktionales ergeben, ist es sinnvoll nach γ -vielen Schritten die FFD-Basis zu wechseln. In der Praxis hat sich ein Wert von $\gamma = 5$ als geeignet erwiesen.

6.3.2 FFD-ALGORITHMEN MIT LOKALISIERUNG

Im Folgenden werden zwei Möglichkeiten angegeben, um ein lokalisiertes FFD-Optimierungsverfahren zu erhalten. Zum einen kann eine Folge lokaler Basisfunktionen gewählt werden, wie zum Beispiel die B-Splines. Durch die lokalen Basisfunktionen wirken sich Änderungen in den Freiheitsgraden nur lokal aus. Der Nachteil dieser Methode ist eine erhöhte Anzahl von Freiheitsgraden, abhängig von den gewählten Basisfunktionen. Allerdings kann man diese Methode gut mit Algorithmus 10 kombinieren, da es nur nötig ist die Folge der Basen durch eine Folge von B-Spline-Basen anzugeben.

Als Alternative kann man ein Verfahren verwenden, welches die Anzahl der Freiheitsgrade konstant lässt oder im günstigsten Fall reduziert. Dazu wird eine endliche Folge von kompakten Teilintervallen $I_i := \Pi_i(\alpha^{(i)}, \beta^{(i)})$ von Ω gewählt, so dass $\Omega \subseteq \bigcup_i I_i$ gilt. Zwei Intervalle $I_i, I_j \in I$ heißen *benachbart*, falls $I_i \cap I_j$ nicht leer ist.

Als nächstes soll die Menge der modifizierten FFD-Funktionen über I_i bestimmt werden. Sei $T_i: \Omega \rightarrow I_i$ gegeben durch

$$T_i(x) := \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1^{(i)} b_1 - \beta_1^{(i)} a_1}{b_1 - a_1} \\ \vdots \\ \frac{\alpha_d^{(i)} b_d - \beta_d^{(i)} a_d}{b_d - a_d} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\beta_1^{(i)}}{b_1 - a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\beta_d^{(i)}}{b_d - a_d} \end{pmatrix} x. \quad (6.9)$$

Als Basisfunktionen \tilde{B} für die Menge finiter FFD-Funktionen über I_i wird dann

$$\tilde{B}(x) := B(T^{-1}(x)) \quad (6.10)$$

gewählt. Dann ist $\mathcal{M}(\tilde{B}, \mathcal{A}) \subseteq \Psi_{\mathcal{Z}}(I_i)$ eine flexible Menge von FFD-Funktionen, falls $\mathcal{M}(B, \mathcal{A})$ eine flexible Menge auf Ω ist.

Als nächstes muss die Menge der FFD-Funktionen $\mathcal{M}(\tilde{B}, \mathcal{A})$ modifiziert werden. Dafür ist es notwendig, alle Nebenbedingungen g, h zu bestimmen, die in dem Intervall I_i aktiv sind. Eine Nebenbedingung g_k bzw. h_k ist aktiv im Intervall I_i , falls in dem Intervall restringierte Punkte existieren. Es genügt für jedes Intervall I_i eine Raummodifikation E_i zu verwenden, die nur die aktiven Nebenbedingungen in die Basis integriert. Allerdings besteht noch kein glatter Übergang zu Ω/I_i . Um einen k -mal stetig differenzierbaren Übergang zu erreichen, wählt man eine Boundingbox E_{Box} über dem Abschluss des betrachteten Intervalls und wendet diese auf \mathcal{M} an.

Durch die Reduzierung der Nebenbedingungen auf die aktiven Nebenbedingungen kann in vielen Fällen eine deutliche Reduzierung der Freiheitsgrade erreicht werden. Allerdings ist zu beachten, dass, falls der Schnitt zweier benachbarter Intervalle klein ist und die geforderte Glattheit des Überganges groß ist, dort nur kleine Änderungen möglich sind, da die Gewichtsfunktionen der Boundingboxen alle Änderungen im Bereich des Randes der Intervalle stark abdämpfen. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, eine Überdeckung zu wählen, deren benachbarte Intervalle einen relativ großen Schnitt haben. Dies wiederum führt zu einer großen Anzahl von Intervallen. Um die Anzahl zu reduzieren, werden nur jene Intervalle I_i betrachtet, deren Schnitt mit dem zu optimierenden geometrischen Objekt u nicht leer ist. Diese Intervalle werden als relevante Intervalle bezeichnet. Bei der Optimierung ist es ausreichend die relevanten Intervalle zu betrachten, allerdings kann sich bei jedem FFD-Schritt die Menge der relevanten Intervalle ändern.

Dieser Ansatz führt zu dem Algorithmus 11 (es sind nur die Änderungen angegeben).

6.4 ALGORITHMUS FÜR RAUMMODIFIKATIONEN

Zum Ende des Kapitels geben wir einen Algorithmus an, um die Raummodifikationen zu konstruieren. Dazu müssen die Nebenbedingungen wie in Kapitel 4 beschrieben vorliegen.

Algorithmus 11 (globaler FFD-Algorithmus mit Lokalisierung):**Schritt 0: Initialisierung.**

Sei die Initialisierung wie in Algorithmus 9 und $\Omega \subseteq \bigcup_r I_r$, $i := 1, j := 1$.
Weiter sei die Raummodifikation $E_{g,h}$ (Algorithmus 12) berechnet.

Schritt 1: Modifizieren von $\mathcal{M}(\tilde{B}, \mathcal{A})$.

- Falls $I_j \cap u \neq \emptyset$
 - Bestimme $E_{Box,j}$ und berechne

$$(\tilde{B}, \mathcal{A}) := E_{Box,j}(E_{g,h}(B \circ T_i^{-1}, \mathcal{A}))$$

- Sonst:
 - setze $j := j + 1$ (falls $j > j_{\max}$ setze $j := 1$ und $i := i + 1$)
 - gehe zu **Schritt 1**

Schritt 2: Optimierungsphase.

- Falls A_k ein stationärer Punkt ist und $i = i_{\max}$ gilt wird der Algorithmus beendet.
- Sonst:
 - Falls $k = \gamma$ dann setze $k := 0$ und $j := j + 1$, $u_1 := u_\gamma$.
 - Bestimme A_{k+1}

$$A_{k+1} := \text{Opt}(u_k)$$

- Falls $A_{k+1} \notin \tilde{\mathcal{A}}$ dann bestimme $\mu \in (0, 1)$ mit $\mu A_{k+1} \in \tilde{\mathcal{A}}$ und setze $A_{k+1} := \mu A_{k+1}$.

Schritt 3: Berechnung der geometrischen Deformation.

- Das neue geometrische Objekt u_{k+1} ist gegeben durch

$$u_{k+1} := u_k + \tilde{B}(u_k)A_{k+1}.$$

- Setze $k = k + 1$ und gehe zu **Schritt 1**.

Es ist sinnvoll, die Nebenbedingungen nach der Art (Hindernis, Fixierung, usw ...) und der Dimension zu sortieren. Dies ermöglicht die Anzahl der Überlagerungen, falls vorhanden, zu reduzieren. Der Algorithmus 12 gibt eine Vorgehensweise zum Erstellen von Raummodifikationen an. Falls die verwendeten Raummodifikationen normiert sind, so genügt es, die E_i Raummodifikation nur einmal anzuwenden, da die normierten Raummodifikationen die lokale Injektivität erhalten.

Algorithmus 12 (Raummodifikationen):

Schritt 0: Initialisierung.

- Folge von Nebenbedingungen R_i , $0 \leq i \leq r$.
- Sei E die Raummodifikation mit $E(B, \mathcal{A}) = (B, \mathcal{A})$.

Schritt 1: Bestimme Raummodifikation zu R_i .

- Bestimme eine flexibilitätserschaltende Raummodifikation E_{R_i} .
- Falls möglich verwende Strukturen aus E_{R_j} , $0 \leq j < i$ für E_{R_i} , so dass $\dim(B_{E_{R_i} \circ E})$ minimal ist.
- Setze $E := E_{R_i} \circ E$.

Schritt 2: Update.

- Setze $i := i + 1$, falls $i = r$ gilt, so beende Algorithmus mit dem Ergebnis E .
- Gehe zu Schritt 1.

7 ANWENDUNGEN

In diesem Kapitel sollen einige Anwendungen der in den vorigen Kapiteln beschriebenen Optimierungsmethoden veranschaulicht werden. Die hierbei verwendeten Mengen von FFD-Funktionen sind, falls nichts anderes angegeben ist, injektive homotope global zulässige FFD-Funktionen.

7.1 MINIMIERUNG DER SEILLÄNGE

Als erstes Beispiel wird das Beispiel zur Minimierung der Seillänge (siehe Kapitel 2) behandelt. In Kapitel 3.2.2 wurde dieses Beispiel bereits mit lokalen zulässigen FFD-Funktionen behandelt. Im Folgenden werden global zulässige FFD-Funktionen verwendet.

Beispiel 7.1 (Weiterführung von Beispiel 2.1). *Es sind vier Raummodifikationen nötig, um eine Menge von global zulässigen FFD-Funktionen zu erhalten. Zum einen werden mit Hilfe von zwei Raummodifikationen die beiden Punkte P und Q angekoppelt. Zum anderen wird das Hindernis W fixiert und die Injektivität der FFD-Funktionen numerisch sichergestellt. Bei der Fixierung ist zu beachten, dass nur eine Raumüberlagerung verwendet wird, indem man zwei Kurven f und g wählt, die sich nur in den Punkten P und Q schneiden und deren Tangenten in den beiden Punkten einen Winkel von 90 Grad haben. Die Optimierung wird auf vier Mengen von polynomialen global zulässigen FFD-Funktionen durchgeführt. Es werden konstante (siehe Abb. 7.1(a)), lineare (siehe Abb. 7.1(b)), rein quadratische (siehe Abb. 7.1(c)) und quadratische (siehe Abb. 7.1(d)) FFD-Funktionen verwendet. In den Abbildungen sind jeweils der erste, dritte, vierte und zwanzigste Optimierungsschritt dargestellt. Die Optimierung mit konstanten FFD-Funktionen wird mit 4 Freiheitsgraden durchgeführt, die linearen benötigen 12, die rein quadratischen 20 und die quadratischen 24. Als Algorithmus wurde ein Gradientenabstiegsverfahren zusammen mit Algorithmus 9 verwendet.*

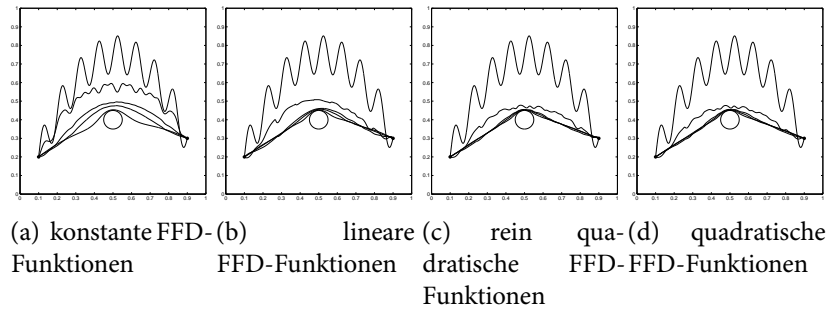


Abbildung 7.1: Globale FFD-Optimierung eines Seils

Ergebnis: Ein Vergleich der Seillängen für die ersten 5 Schritte ist in Abbildung 7.2 gegeben. Bei der Betrachtung fällt auf, dass zwischen dem reinen qua-

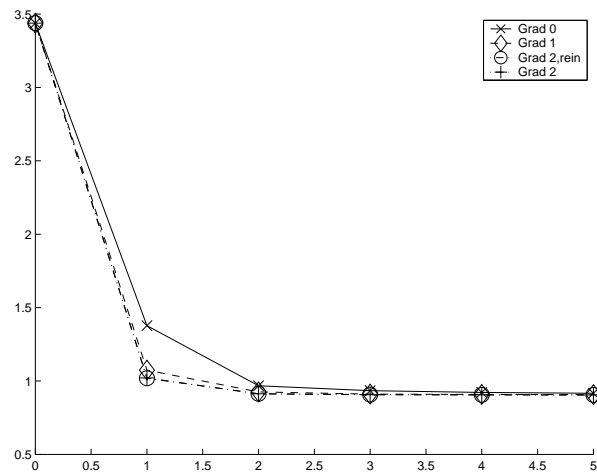


Abbildung 7.2: Abnahme der Seillänge durch FFD-Optimierung mit verschiedenen Basisfunktionen

dratischen und dem quadratischen Fall nur ein sehr geringer Unterschied existiert (siehe Tabelle 7.1).

Setzt man die erhaltenen Ergebnisse in Relation zu der Anzahl der verwendeten Freiheitsgrade, so erscheinen die konstanten FFD-Funktionen als ein geeigneter Startraum. Nach einigen Iterationen in diesem Raum scheint es sinnvoll, zu den linearen beziehungsweise zu den rein quadratischen zu wechseln. Die quadratischen Ansatzräume bieten in diesem Beispiel offensichtlich keinen Vorteil gegen-

Iteration	quadratisch	rein quadratisch
0	3.4376435	3.4376435
1	1.0182838	1.0210563
2	0.91293730	0.91279528
3	0.90708139	0.90670470
4	0.90560324	0.90536608
5	0.90506827	0.90491399
6	0.90459614	0.90460555
7	0.90443545	0.90435412
8	0.90431850	0.90426258
9	0.90423860	0.90419117
10	0.90415774	0.90411829
11	0.90407521	0.90405226
12	0.90400335	0.90398649
13	0.90392946	0.90392823
14	0.90386260	0.90386532

Tabelle 7.1: Seillänge bei quadratischer und rein quadratischer Optimierung

über den rein quadratischen.

An diesem Beispiel soll noch einmal verdeutlicht werden, welchen Effekt eine Fixierung der Punkte P und Q ohne eine Überlagerung der Räume hat. Um dies zu zeigen wird das Beispiel mit einer Hindernisraummodifikation für P und Q optimiert. Bei der vorhergehenden Optimierung wurde das geometrische Objekt $\nu = \{P, Q\}$ als Fixierung interpretiert und die Raummodifikation zu ν war durch

$$E_F := E_{\text{inj}}([w_{\gamma, \sigma, c_1}^k B, w_{\gamma, \sigma, c_2}^k B], \mathcal{A} \times \mathcal{A}) \quad (7.1)$$

gegeben. Die Raummodifikationen wurden zu zwei Kurven $c_1, c_2 \in C^2(\mathbb{R}, \Omega)$ erstellt, wobei die Kurven c_1, c_2 nur in den fixierten Punkten übereinstimmten, also $c_1 \cap c_2 = \{P, Q\}$, und $w_{\gamma, \sigma, c_1}^k, w_{\gamma, \sigma, c_2}^k$ flexibilitäts-erhaltende Plateau-Gewichtsfunktionen waren. Die Kurven (siehe Abbildung 7.3) sind gegeben durch

$$c_1(t) := P + t\vec{Q}P \quad (7.2)$$

$$c_2(t) := P + \frac{1}{2}\vec{Q}P + \frac{1}{2}\|P - Q\|_2 \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

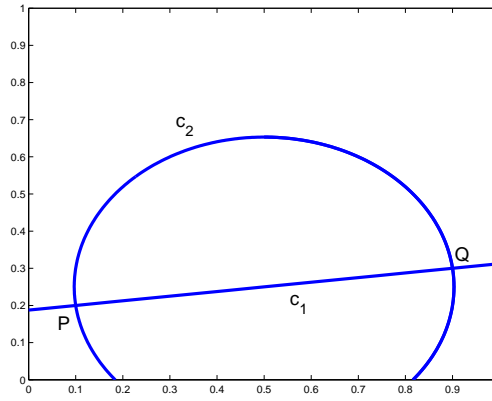


Abbildung 7.3: Hinderniskurven c_1 und c_2 zu den Punktfixierungen P, Q .

Das geometrische Objekt wird als Hindernis interpretiert und es wird die Raummodifikation gegeben durch

$$E_H := E_{\text{inj}}(w_{\gamma,\sigma}^k B, \mathcal{A}), \quad (7.4)$$

mit

$$w_{\gamma,\sigma}^k(x) = 0 \Leftrightarrow x = P \text{ oder } x = Q, \quad (7.5)$$

verwendet, was einer Fixierung ohne Raumüberlagerung entspricht. Diese Gewichtsfunktion kann aber nicht flexibilitätserhaltend sein, denn es gilt

$$\frac{d}{dt} w_{\gamma,\sigma}^k(c(t))|_{t=t_0} = 0 \quad (7.6)$$

für jede Kurve $c(t)$ mit $c(t_0) = P$ oder $c(t_0) = Q$ oder aber es gibt weitere Punkte $x \in \Omega/\nu$ mit $w_{\gamma,\sigma}^k(x) = 0$, dann ist $w_{\gamma,\sigma}^k$ aber keine Gewichtsfunktion. Betrachtet man die optimierte Kurve nach 20 Iterationen (siehe Abbildung 7.4) so ist zu erkennen, dass die Fixierung der Punkte zu einer Fixierung der Tangenten der Seilkurve in den Punkten P und Q führt. Dies ist unabhängig von dem verwendeten Grad der FFD-Funktionen. Es sind wieder die Startkurve sowie die erste, zweite und zwanzigste Iteration dargestellt. Die minimale Seillänge nach 20 Iterationen beträgt 1.378. Vergleicht man dieses Ergebnis mit der zuvor betrachteten Variante, in der eine Raumüberlagerung verwendet wurde, hier betrug der Wert nach 20 Iterationen 0.911, so zeigt sich hier ein deutlicher Unterschied.

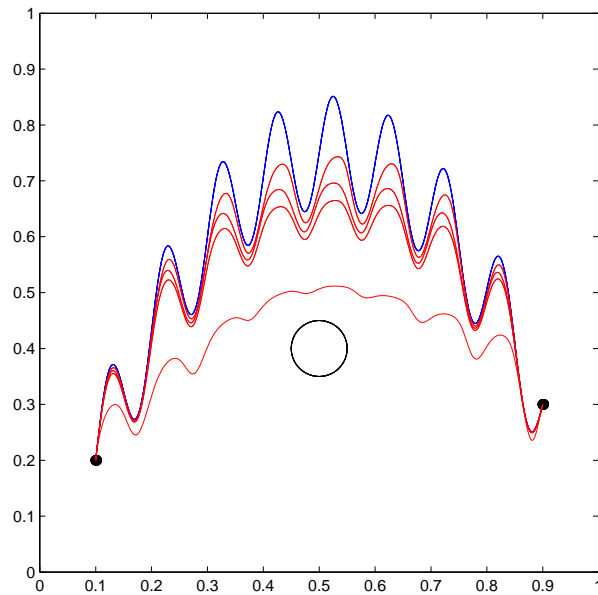


Abbildung 7.4: Globale FFD-Optimierung, ohne Überlagerung

7.2 MINIMALFLÄCHEN

Im Folgenden greifen wir das Beispiel 2.2 aus Kapitel 2 wieder auf. Dabei soll die Oberfläche eines geometrischen Objekts unter Nebenbedingungen minimiert werden. Das geometrische Startobjekt ist durch 22.500 Punkte im \mathbb{R}^3 gegeben, dies sind demzufolge 67.500 Kontrollparameter. Der FFD-Ausgangsraum ist durch die reine Polynombasis vom Grad 2 gegeben, dementsprechend durch 21 Freiheitsgrade. Die Optimierung erfolgt durch das Verfahren des steilsten Abstiegs. Dabei wird die durch E_{inj} vorgegebene Menge zulässiger Freiheitsgrade im Normalfall nicht eingehalten. Vielmehr wird bei jedem Schritt die Deformation auf lokale Injektivität, wie in Lemma 3.8 angegeben, überprüft. Nur falls die Überprüfung nicht auf lokale Injektivität hinweist, wird auf die durch E_{inj} vorgegebene Menge von Freiheitsgraden zurückgegriffen.

Bemerkung 7.1. Bei der Konstruktion von Bauteilen für Maschinen kommt es oft vor, dass Teile der Maschine schon vorliegen. Diese sind oft durch eine große Anzahl von Flächenstücken gegeben und sollen im weiteren Prozess nicht verändert werden. Der Konstrukteur muss also bei der Konstruktion des neuen Bauteils die geometrische Struktur des alten beachten. Im Allgemeinen berechnet man hierzu

Flächenstücke, die das fertige Bauteil einschließen, aber nicht genau darstellen. Dabei versucht man möglichst wenige Flächenstücke zu verwenden, die geometrische Struktur aber trotzdem möglichst genau darzustellen. In diesem Zusammenhang kann man die nachfolgenden Beispiele betrachten.

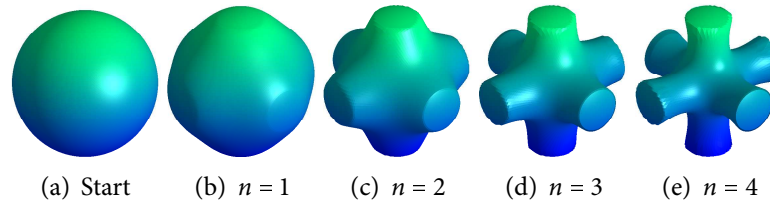


Abbildung 7.5: Beispiel für Minimalfläche mit Fixierungen, symmetrisch

Beispiel 7.2. Zuerst soll das in Kapitel 2 vorgestellte Beispiel berechnet werden. Die Kugel sei also durch eine Reihe von Flächen, die einen Würfel bilden, fixiert. Das Innere des Würfels ist keinen Restriktionen unterworfen, allerdings soll die topologische Struktur des geometrischen Objekts erhalten bleiben. Nachdem die Basis vorgegeben ist, muss als nächstes die Raummodifikation berechnet werden. Da nur das Innere des Würfels modifiziert werden darf, wählt man für Ω den offenen Würfel und als Raummodifikation wählt man die Boundingbox $E_{B(\Omega)}$ von Ω und die injektive Raummodifikation E_{inj} . Dann erhält man als neue Basis $E_{B(\Omega)}(B)$ und als neue zulässige Koeffizientenmenge $E_{inj}(E_{B(\Omega)}(\mathcal{A}))$.

In Abbildung 7.5 sind die ersten 4 Iterationen dargestellt. Abbildung 7.6(a) zeigt den Verlauf des Flächeninhaltes während der ersten 8 Iterationen. Verkleinert

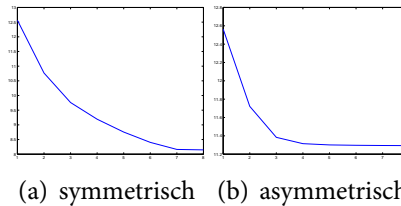


Abbildung 7.6: Flächeninhaltsverlauf zu Beispiel 7.2 und 7.3

man den die Kugel an den Rändern fixierenden Würfel, so werden die geometrischen Deformationen geringer. Vergrößert man den Abstand der Würfel Flächen,

fällt die Kugel in ihrem Zentrum bis fast auf einen Punkt zusammen. Dies würde bei einer Seifenblase zum Zerreißen und damit zu einer Änderung der topologischen Struktur führen.

Die Fixierungen in Beispiel 7.2 sind symmetrisch und es wäre einfach, die Deformation durch das Betrachten eines Teiles der symmetrischen Fläche zu berechnen. Das nächste Beispiel soll zeigen, dass die Symmetrie der Bedingungen nicht notwendig für eine einfache Durchführbarkeit des Verfahrens ist.

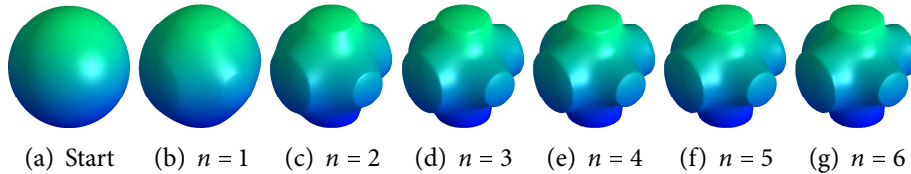


Abbildung 7.7: Beispiel für Minimalfläche mit Fixierungen, unsymmetrisch

Beispiel 7.3. *Man betrachte erneut Beispiel 7.2, allerdings wähle man als Boundingbox keinen Würfel, sondern einen Quader. Ebenso könnte man auch ein Prisma oder ein anderes Polyeder wählen. Die Basis und die Menge der zulässigen Freiheitsgrade werden ebenso wie bei Beispiel 7.2 modifiziert, wobei die Raummodifikation $E_{B(\Omega)}$ leicht abgeändert werden und durch eine Raummodifikation von 6 Flächenstücken E_1, \dots, E_6 ersetzt werden muss. Abbildung 7.7 zeigt die ersten 6 Iterationen, die Abnahme des Flächeninhaltes ist in Abbildung 7.6(b) angegeben. Ein weiteres Beispiel für eine asymmetrische geometrische Fixierung ist durch Abbildung 7.8 gegeben.*

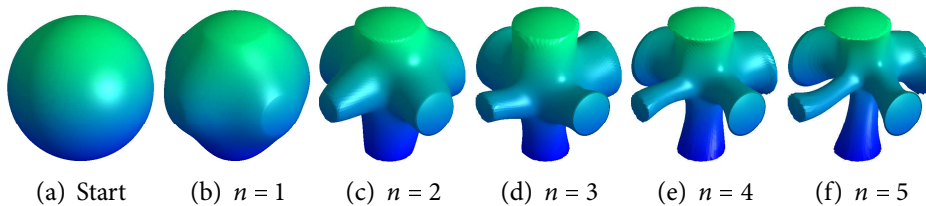


Abbildung 7.8: Beispiel für Minimalfläche mit Fixierungen, unsymmetrisch

Nachdem bisher nur angekoppelte Flächen betrachtet wurden, sollen im Folgenden zu den Fixierungen noch Hindernisrestriktionen hinzugefügt werden. Zum Teil soll sogar auf die Fixierung komplett verzichtet werden.

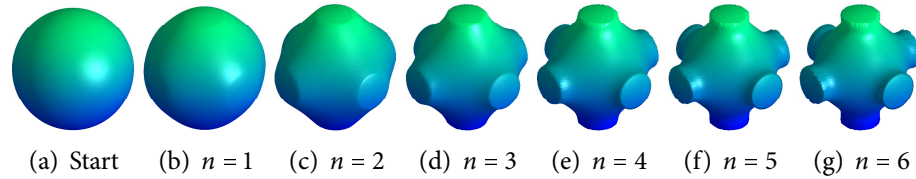


Abbildung 7.9: Beispiel für Minimalfläche mit Hindernis

Beispiel 7.4. Noch einmal betrachtet man das Beispiel der durch einen Würfel fixierten Kugel (siehe Beispiel 7.2). Im Inneren der Kugel sei aber eine weitere Kugel mit einem geringeren Durchmesser, die von der ursprünglichen Kugel nicht durchdrungen werden darf. Man stelle sich einen Luftballon vor, aus dem man die Luft lässt, in dessen Inneren sich aber ein Luftballon befindet aus dem keine Luft entweicht. Der äußere Luftballon schmiegt sich dann an den inneren an, wobei der äußere aber an den 6 durch den Würfel vorgegebenen Stellen fixiert bleibt.

Zu den bestehenden Raummodifikationen $E_{B(\Omega)}$ und E_{inj} wird noch eine Hindernisrestriktion hinzugefügt, die durch eine Raummodifikation E_K realisiert wird. Dabei fixiert E_K den Raum im Bereich der Hinderniskugel. Die Abbildung 7.9 zeigt den Verlauf der geometrischen Optimierung. Dabei kann man sehen, dass sich die Kugel schnell auf die Hinderniskugel zusammen zieht. Ohne die Hinderniskugel wäre mit einem Verlauf wie in Abbildung 7.5 zu rechnen.

Beispiel 7.5. Wir greifen erneut die Idee von Beispiel 7.4 auf, wollen aber das Hindernis verändern und die Fixierung am Rande der Kugel aufheben. Als neues Hindernis wurde in diesem Beispiel ein Würfel im Inneren der Kugel gewählt. Analog zu dem vorherigen Fall bestimmt man die Hindernisraummodifikation E_K und die dazugehörige Injektivitätsrestriktion E_{inj} und erhält auf dem bekannten Weg den zur FFD-Optimierung zur Verfügung stehenden Raum. Da nun die Kugel seitlich nicht mehr fixiert ist, zieht sie sich komplett auf den Würfel, der in ihrem Inneren liegt, zusammen (siehe Abbildung 7.10). Es ist nun möglich, ein weiteres Hindernis in Form eines weiteren Würfels, dem bereits vorhandenen Hindernis

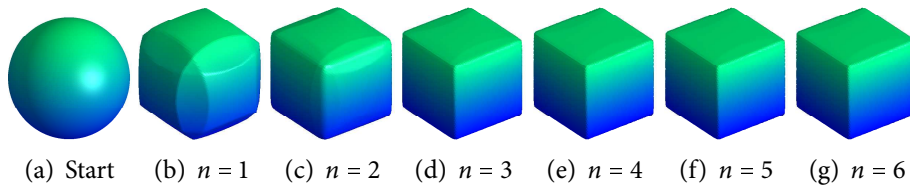


Abbildung 7.10: Beispiel für Minimalfläche mit Quaderhindernis

hinzuzufügen. Die Würfel sind so angeordnet, dass eine Ecke der beiden Würfel übereinstimmt. Bei der erneuten Minimierung durch FFD-Optimierung erhält man eine die beiden Würfel umschließende Fläche, wie sie in Abbildung 7.11 dargestellt ist.

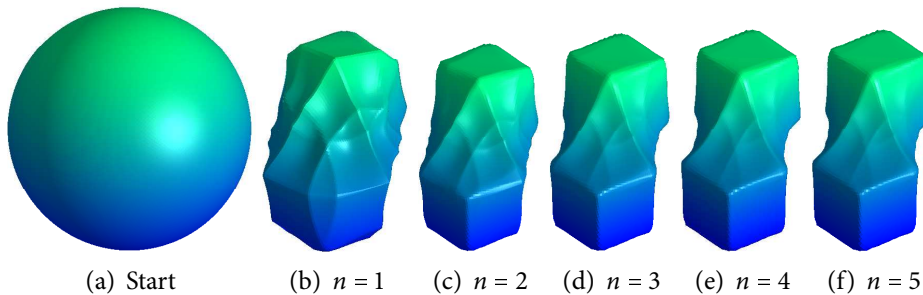


Abbildung 7.11: Beispiel für Minimalfläche mit zwei Würfelhindernissen

Analog zu den zwei Würfeln lassen sich auch zwei Hinderniskugeln mit unterschiedlichem Radius als Hindernis verwenden. In Abbildung 7.12 kann man erkennen, wie sich das geometrische Ausgangsobjekt an die beiden Hinderniskugeln anschmiegt.

Wir geben noch ein weiteres Beispiel an, in dem Fixierungen und Hindernisse gemeinsam betrachtet werden.

Beispiel 7.6. Es werden zwei gegenüberliegende Punkte innerhalb der Sphäre fixiert und eine Ebene, die die Kugel schneidet, wird am Schnitt als Fixierung re-

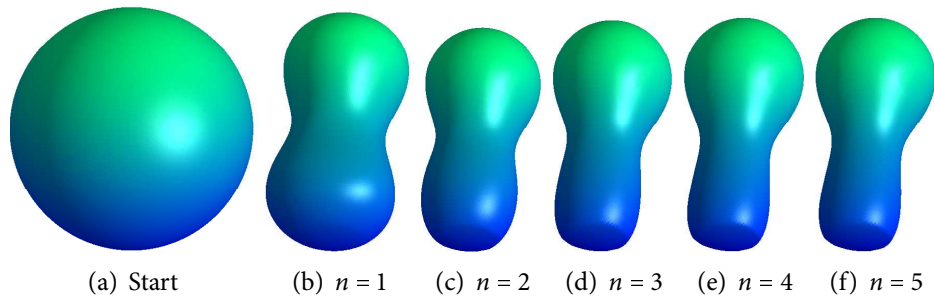


Abbildung 7.12: Beispiel für Minimalfläche mit zwei Hinderniskugeln

stringiert. Um die beiden Punkte zu fixieren, werden zwei Raummodifikationen

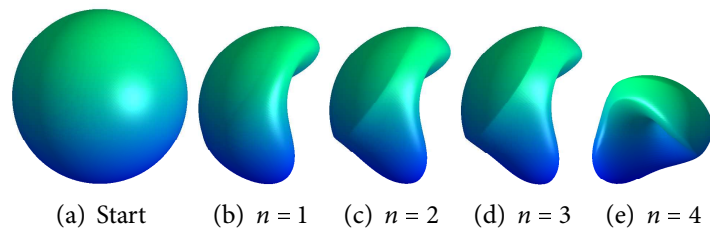


Abbildung 7.13: Beispiel für Minimalfläche mit zwei Hinderniskugeln und Fixierung

benötigt. Es wird die injektive Raummodifikation E_{inj} und eine Fixierungsrestriktion E_H verwendet (siehe Abbildung 7.13).

Bei der Berechnung der Beispiele fällt Folgendes auf: In den ersten 2 Schritten nimmt der Flächeninhalt stark ab, während in den darauffolgenden Schritten die Abnahme in den meisten Beispielen nur noch gering ausfällt. Dies ist zum großen Teil auf das verwendete Optimierungsverfahren zurückzuführen. Hier wäre es sinnvoller, das Newton-Verfahren oder ein newtonartiges Optimierungsverfahren zu verwenden. Allerdings sollen bei den vorgestellten Beispielen die möglichen Anwendungen und die Vielfalt des eingesetzten Verfahrens im Vordergrund stehen und deswegen wurde auf eine Implementation von aufwendigeren Optimierungsverfahren verzichtet.

7.3 VOLUMENREDUKTION UNTER NEBENBEDINGUNGEN

Gegeben sei eine Fläche über dem Einheitsquadrat, die an den Rändern die xy -Ebene schneidet (siehe Abbildung 7.14). Das Volumen des geometrischen Objekts ist gegeben durch das zwischen der Fläche und der xy -Ebene eingeschlossene Volumen. Das Optimierungsproblem besteht darin, das Volumen des geometrischen Objekts und die Vergleichsspannungen auf der Fläche zu reduzieren. Dabei soll der Rand der Fläche fixiert bleiben. Für die Optimierung wurden die Vergleichsspannungen als Nebenbedingungen für ein nicht-lineares restringiertes Optimierungsverfahren angegeben, während die Fixierung der Ränder der Fläche durch einen Erweiterungsoperator integriert wurde. Die Optimierung wurde dann mit linearen, quadratischen und kubischen FFD-Funktionen durchgeführt. Es wurden jeweils 6 FFD-Iterationen gemacht. Die Abbildungen 7.15 zeigen den Verlauf der Optimierung mit linearen und die Abbildungen 7.16 mit kubischen FFD-Funktionen. Die Abbildungen zeigen die Veränderung in der z -Richtung. Im linearen Fall konnte zwar das Volumen reduziert werden, nicht aber die Vergleichsspannungen. Bei den kubischen FFD-Funktionen konnten sowohl das Volumen als auch die Vergleichsspannung gesenkt werden.

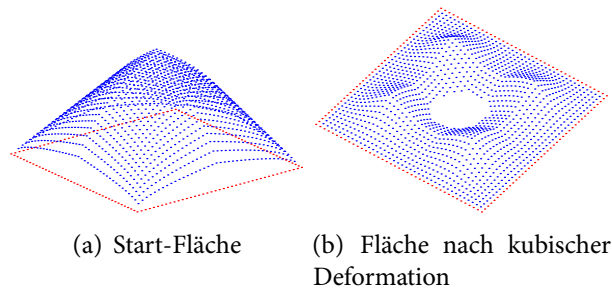


Abbildung 7.14: Fixierte Fläche.

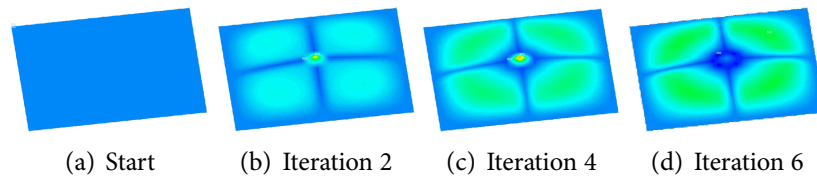


Abbildung 7.15: Optimierung mit quadratischen FFD-Funktionen.

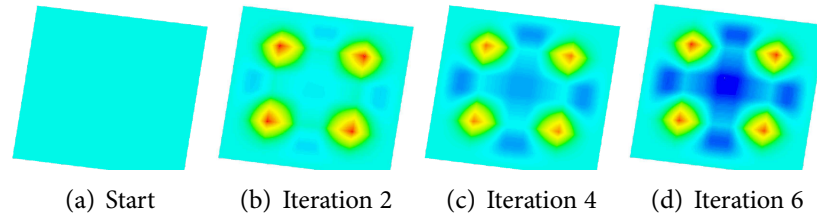


Abbildung 7.16: Optimierung mit kubischen FFD-Funktionen.

7.4 DEFORMATION VON SOLIDS UNTER BELASTUNG

Die beiden nachstehenden Beispiele behandeln Solids, also geometrische Objekte im \mathbb{R}^3 , denen ein Volumen zugewiesen werden kann.

PLATTE

Es sei eine Platte gegeben, die an einer Seite fixiert ist und deren Normalenvektoren an dieser Seite ebenfalls fixiert sein sollen. Auf die der Fixierung entgegengesetzten Seite der Platte wird eine Kraft ausgeübt. Dabei wird die Platte deformiert. Das Optimierungsproblem besteht nun darin, die Geometrie der Platte so zu verändern, dass die Belastung der Platte zu einer minimalen Deformation führt. Dabei sind die Vergleichsspannungen innerhalb der Platte nach oben beschränkt. Außerdem darf die Breite und Länge der Platte nicht verändert werden. Die Höhe hingegen ist beliebig. Die Fixierung der Platte wurde mit einer Raummodifikation in die Basis integriert. Ebenso wurden an den Seiten der Platte Richtungsfixierungen vorgenommen, die sicherstellten, dass Länge und Breite der Platte konstant bleiben. Die Optimierung wurde mit einer Basis von rein quadratischen FFD-Funktionen durchgeführt. Das Optimierungsverfahren ist ein nichtlineares restringiertes Optimierungsverfahren, das als ein-

zige Nebenbedingungen die Vergleichsspannungen verwendet. Die restlichen Nebenbedingungen wurden durch die FFD-Funktionen sichergestellt. In den Abbildungen 7.17 sind die ersten 3 Iterationen abgebildet.

VIERTEL-KREIS

Gegeben sei ein Solid, das aus einem Viertel-Kreis (siehe Abbildung 7.18) besteht. Das Volumen des Viertel-Kreises soll minimiert werden, wobei die Vergleichsspannungen, die innerhalb des Solids auftreten, nach oben beschränkt sind. Außerdem soll die Deformation auf den ganzen Kreis fortsetzbar sein, während die Seiten des Kreises fixiert bleiben. Es ist also notwendig, an den Stellen, an denen der Viertel-Kreis zum Voll-Kreis fortgesetzt wird, die Normalenrichtung des Solids zu fixieren, damit der Viertel-Kreis nach der Deformation stetig fortgesetzt werden kann. Dabei wird an diesen Stellen eine Fixierung des Solids in einer Raumkomponente vorgenommen. So ist der Solid an den Symmetriestellen in zwei Richtungen deformierbar. Des weiteren werden die Kreisränder des Solids fixiert.

7.5 TRAGFLÄCHEN

Die nächste Anwendung beschäftigt sich mit Tragflächenprofilen von Flugzeugen. Die Restriktionen, die hier angegeben werden, sind keine realen Restriktionen, sondern sollen die Möglichkeiten der FFD-Optimierung verdeutlichen. Wenn eine Tragfläche bezüglich des Auftriebs optimiert werden soll, so ergeben sich aufgrund des verwendeten numerischen Modells einige geometrische Restriktionen. So muss zum Beispiel sichergestellt werden, dass am Ende der Tragfläche eine Spitze entsteht, da die verwendeten Modelle dort Wirbel verwenden. Ebenfalls wird davon ausgegangen, dass der Anfang der Tragfläche ein Teil eines Kreises ist. Aber es existieren noch weitere Bedingungen durch die Befestigung der Tragfläche an dem Flugzeug. So seien zwei Punkte Q1 und Q2 vorgegeben, die Teil der Tragfläche sein müssen, damit sie an das Flugzeug angebracht werden kann. Dies ist eine Fixierungsbedingung, die in die Basis integriert werden kann. Ebenso lassen sich die beiden Tangenten am Ende der Tragfläche fixieren. Des weiteren ist die Länge der Tragfläche durch eine Hindernisgerade g_2 beschränkt. Für den vorderen Teil der Tragfläche, jener Teil der vor den fixierten Punkten liegt, kann eine Richtungsfixierung in die Basis inte-

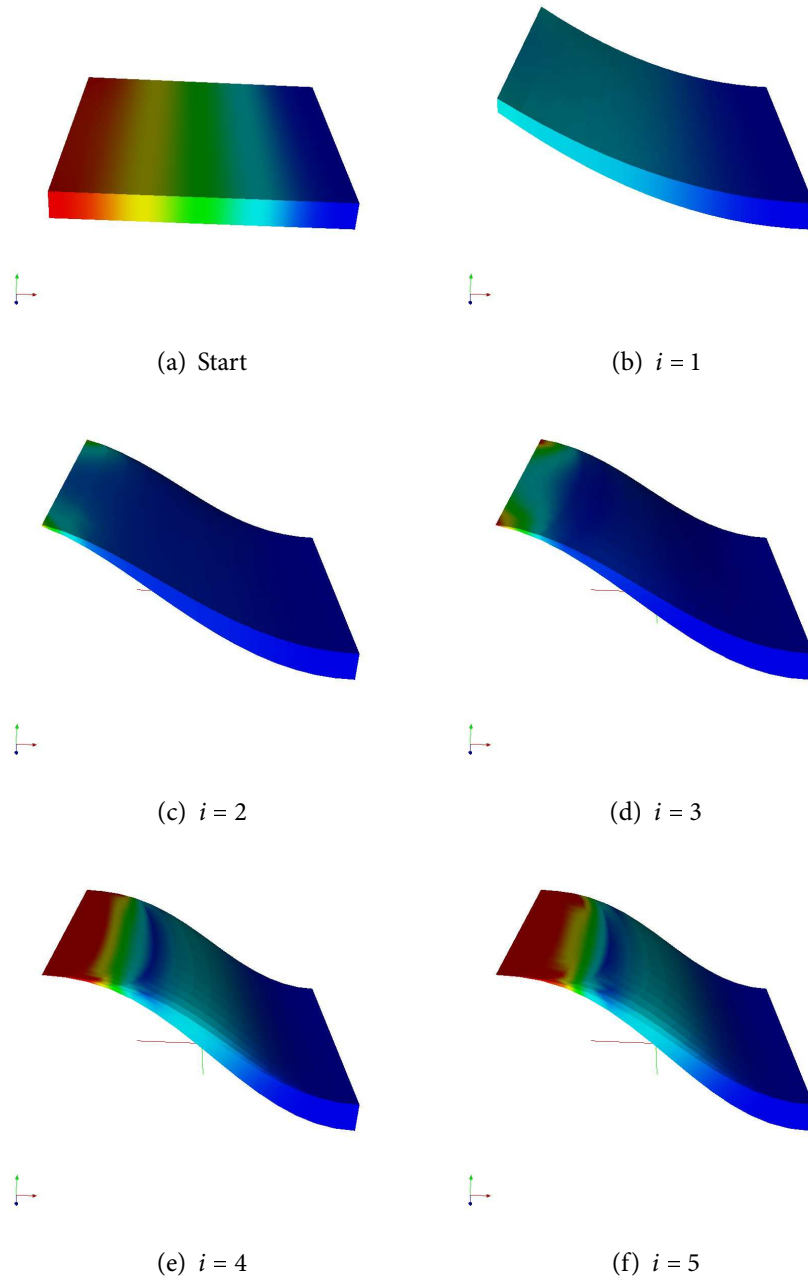


Abbildung 7.17: Optimierung einer Platte unter Spannungsnebenbedingungen.

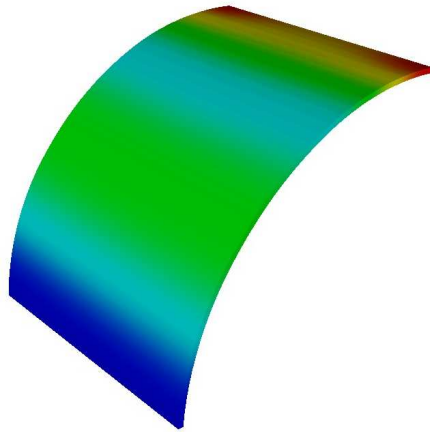


Abbildung 7.18: Kreissolid.

griert werden, die sicherstellt, dass die Normalenrichtungen konstant bleiben. In Abbildung 7.19(a) sind die geometrischen Restriktionen abgebildet. Die zweite Abbildung 7.19(b) zeigt das Vektorfeld der zulässigen Richtungen, das durch die Integration der Restriktionen in die Basis der FFD-Funktionen entsteht.

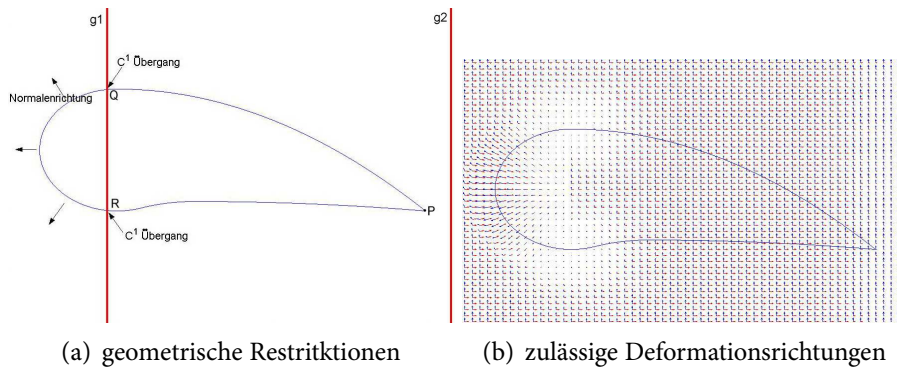


Abbildung 7.19: Optimierung von Tragflächen.

7.6 BOOSTER

Im Folgenden betrachten wir noch einmal das Beispiel 2.3. Durch die Anwendung der FFD-Optimierung konnte bei dem vorgestellten Beispiel zum einen

die Anzahl der notwendigen Design-Parameter bzw. Freiheitsgrade von einigen Hundert auf 24 reduziert werden. Zum anderen wurden die geometrischen Restriktionen exakt eingehalten und ein bezüglich der Spannungsnebenbedingungen besseres Ergebnis erreicht. Das heißt, bei gleichem Volumen waren die Spannungen geringer als bei dem in der Veröffentlichung [RVRo1] verwendeten Verfahren. Insbesondere konnten die Spannungspitzen an der Zitronenform stark reduziert werden. Die Abbildungen 7.20(a) und 7.20(b) geben die

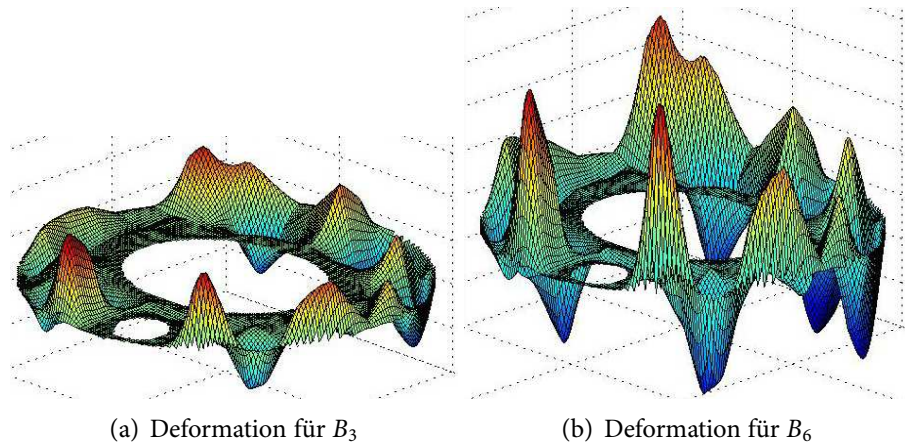


Abbildung 7.20: Geometriedeformation des Boosters

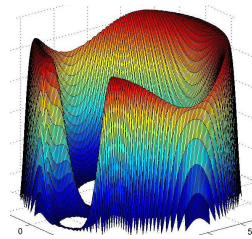


Abbildung 7.21: Gewichtsfunktion zum Boosterbeispiel

Änderungen der Geometrie des Boosters für quadratische und kubische Basen von FFD-Funktionen an. In Abbildung 7.21 ist die Gewichtsfunktion, die zur Raummodifikation bezüglich der Fixierungsrestriktionen verwendet wurde, zu sehen.

7.7 FEDERPENDEL

Das letzte Beispiel ist ein Federpendel, wie es aus der Physik bekannt ist. Gegeben sei ein Gewicht G mit der Masse m , das an einer Feder F mit der Federkonstante D_s im Punkt $(x, y) := F_G$ befestigt ist. Die Feder selbst ist an einem Punkt F_f aufgehängt. Im Ausgangszustand befindet sich das Gewicht etwa in der gleichen Höhe wie der Fixierungspunkt der Feder, dabei ist die Feder nicht gespannt. Über die Energieerhaltungssätze erhält man ein System aus gekoppelten Differentialgleichungen, gegeben durch

$$f(F, t) := \begin{pmatrix} mx_{tt} + cx \\ my_{tt} + cy + mg \\ 0.5m(x_t^2 + y_t^2) - 0.5c(x^2 + y^2) - mgy \end{pmatrix}. \quad (7.7)$$

Zur Lösung dieses Systems von Differentialgleichungen wird das Residuum $\|f\|_2$ zu einer festen Zeit t_i minimiert. Das FFD-Optimierungsproblem lautet

$$\min_{\psi \in \Psi_Z} \|f(\psi(F), t_i)\|_2. \quad (7.8)$$

Dazu wird eine reine Polynom-FFD-Basis für einen global iterierten FFD-Algorithmus verwendet. Mit Hilfe einer Punktfixierung wird der Aufhängungspunkt F_f fixiert. Um die besonderen Möglichkeiten der FFD-Optimierung an diesem Beispiel deutlich zu machen, wird in den zu erwartenden Weg des Federpendels ein Hindernis W eingebaut. Dafür wird unterhalb des Aufhängungspunktes F_f ein Kreishindernis verwendet und dieses mit einer Hindernisraummodifikation in den Ansatzraum der FFD-Funktionen integriert. Das System der Differentialgleichungen muss *nicht* geändert werden. Die Abbildung 7.22 zeigt die ersten 20 Zeitschritte für die Optimierung mit $n = 6$ Parametern für eine reine Polynombasis und $n = 200$ Parameter für eine TSB-Basis. Zur Optimierung wurde ein Gradientenverfahren zusammen mit Algorithmus 10 verwendet.

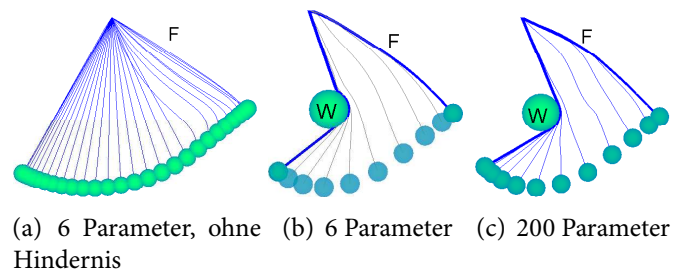


Abbildung 7.22: Federpendel.

8 ZUSAMMENFASSUNG

Mit der Optimierung über Modifizierte FFD-Räume wurde eine Methode vorgestellt, die es ermöglicht, geometrische Objekte effizient zu optimieren. Die bisherigen Ergebnisse zeigen, dass die Methode für eine Vielzahl von Problemen geeignet ist. Die Vorteile der Methode lassen sich wie folgt zusammenfassen:

DIE FFD-OPTIMIERUNG IST ANWENDBAR FÜR BELIEBIGE
GEOMETRISCHE OBJEKTE UNABHÄNGIG VON IHRER DARSTELLUNG

In der Praxis liegen die zu optimierenden geometrischen Objekte in unterschiedlichen Formen vor. So werden in vielen Ingenieurs-Anwendungen durch FE-Netze oder CAD-Flächen parametrisierte geometrische Objekte verwendet. Die Objekte können aber auch implizit gegeben sein. Für die Optimierung mit FFD-Funktionen ist es unerheblich, ob und wie die Objekte parametrisiert sind. Der Ansatz der Deformation des gesamten das Objekt umgebenden Raumes ist universell sowohl auf implizite als auch auf parametrisierte Objekte ohne Unterschiede anwendbar. Deswegen können die FFD-Methoden auf alle geometrischen Optimierungsprobleme angewendet werden.

DIE FFD-METHODE FÜHRT ZU EINER STARKEN REDUZIERUNG DER
OPTIMIERUNGSPARAMETER

Im Gegensatz zu anderen Optimierungsverfahren wird nicht das geometrische Objekt sondern der das geometrische Objekt umgebende Raum parametrisiert. Dadurch kann die Zahl der Parameter unabhängig von dem geometrischen Objekt gewählt werden. Allein die Dimension des geometrischen Objekts gibt eine untere Schranke vor. Wie an den Beispielen gezeigt wurde (siehe Kapitel 7.7) lassen sich bereits mit 6 Parametern im \mathbb{R}^2 Differentialgleichungen berechnen. Diese starke Reduktion von Parametern führt gerade bei Funktionalen, deren Auswertung teuer ist, zu effizienten Optimierungsverfahren, da nur wenige Funktionsauswertungen notwendig sind.

DIE FFD-OPTIMIERUNG IST ENTKOPPELT VON DER GEOMETRISCHEN STRUKTUR

Da bei der global zulässigen FFD-Optimierung das geometrische Objekt *nicht* zur Bestimmung der Menge der zulässigen FFD-Funktionen benötigt wird, ist die zur Optimierung vorhandene Menge von FFD-Funktionen unabhängig von dem geometrischen Objekt. Die Optimierung kann also komplett über die Freiheitsgrade des Raumes durchgeführt werden, ohne dass die Struktur des geometrischen Objekts in die FFD-Optimierung einfließt oder zum Durchführen der FFD-Optimierung vorliegen muss.

DIE METHODE DER FFD-OPTIMIERUNG HÄLT DIE RESTRIKTIONEN EXAKT EIN

Die Verwendung von Raummodifikationen ermöglicht bei der Verwendung von FFD-Optimierungsverfahren die exakte Einhaltung von (geometrischen) Restriktionen. Um dies zu ermöglichen, werden die FFD-Räume mit Gewichtsfunktionen und Gewichtsmatrizen so modifiziert, dass jede FFD-Funktion die Restriktionen exakt einhält. Im Gegensatz zu üblichen Optimierungsverfahren, die zum Einhalten der Restriktionen eine hohe Zahl von Parametern verwenden oder die Restriktionen nur approximieren, kann die Anzahl der Optimierungsparameter bei der FFD-Optimierung konstant gehalten werden.

DIE FFD-OPTIMIERUNG IST EIN FLEXIBLES VERFAHREN

Trotz der wenigen zur Optimierung notwendigen Parameter erhalten die FFD-Verfahren, bei geeigneter Wahl der Basis, die zur Lösung der Optimierungsprobleme notwendigen Flexibilität. Diese hohe, nur von der Basis abhängige, Flexibilität ist sowohl für restringierte als auch für nicht restringierte Optimierungsprobleme gegeben. Dabei genügt es, eine hinreichend flexible Basis zu wählen, um eine hohe Flexibilität der FFD-Funktionen zu erhalten. Generell gilt, die Menge der FFD-Funktionen kann nicht flexibler sein als die Basis. Obwohl es bei bestimmten Restriktionen zu einer Erhöhung der Anzahl der Parameter kommen kann, bleibt die Anzahl der Parameter weiterhin gering gegenüber alternativen Ansätzen.

Mit Hilfe der Raummodifikationen lässt sich nicht nur die exakte Einhaltung der Restriktionen sicherstellen, sondern dieser Ansatz auf ein restringiertes Optimierungsproblem angewandt, führt zu einem nicht restringierten oder affinen Optimierungsproblem. Das Erstellen der Raummodifikationen lässt sich einfach in Form eines Baukastensystems realisieren. Die Erstellung selbst ist für jedes Optimierungsproblem ein *einmaliger* Vorgang. In Kapitel 4 wurden einige Raummodifikationen exemplarisch vorgestellt. Das Prinzip zur Generierung dieser Raummodifikation lässt sich einfach auf Raummodifikationen für beliebige berandete Mannigfaltigkeiten erweitern.

AUSBLICK

Die vorliegende Arbeit soll einen Anhaltspunkt zu den Möglichkeiten der FFD-Optimierung geben. Es sind natürlich noch viele Fragen offen, die im Folgenden knapp umrissen werden sollen.

So gilt es, analog zu den lokal zulässigen auch für die global zulässigen FFD-Funktionen Bedingungen anzugeben, wann sich das allgemeine geometrische Optimierungsproblem in das globale FFD-Optimierungsproblem überführen lässt. Daran schließt sich die Frage an, welchen Raum die mehrfach iterierten FFD-Funktionen aufspannen und ob dieser dicht im Raum der stetigen Funktionen liegt.

Ferner sollte zur weiteren Reduktion der Optimierungsparameter die minimale Anzahl von Optimierungsparametern für k -flexible Mengen von FFD-Funktionen bestimmt werden. Dazu ist es notwendig, weitere FFD-Basen einzuführen. Ausgehend von den aktuellen und weiteren FFD-Basen scheint es sinnvoll, die Flexibilität von FFD-Funktionen nicht nur für Kurven, sondern auch für Flächen zu betrachten.

Um die Anzahl der Überlagerungen bei Raummodifikationen möglichst gering zu halten, wäre in einem nächsten Schritt ein Algorithmus zu erstellen, der für eine neue Raummodifikation nach Möglichkeit bestehende Raummodifikationen so modifiziert, dass es nicht nötig ist, weitere Raumüberlagerungen zu verwenden. Dafür kann ebenfalls ein FFD-Verfahren verwendet werden.

Ebenfalls bei den Raummodifikationen gilt es, den Katalog der vorhandenen Bausteine zu ergänzen. In einem nächsten Schritt wäre es sinnvoll, berandete

Mannigfaltigkeiten in den Katalog mit aufzunehmen.

Für das Lösen von Differentialgleichungen ist das Prinzip der FFD-Optimierung von dem expliziten Verfahren, wie es in dem Federbeispiel verwendet wurde, zu einem impliziten Verfahren zu erweitern. Dabei geschieht die Optimierung in einer höheren Dimension, um die Zeitabhängigkeit zu realisieren.

Abschließend sind weitere Beispiele zu berechnen, um eine Konvergenzrate und eine genauere Untersuchung der Möglichkeiten und Grenzen des Verfahrens zu erforschen.

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

1.1	Freiform-Deformation einer Kugel.	6
2.1	Seil s zwischen P und Q um das Hindernis W	10
2.2	In Würfel eingespannte Kugel	11
2.3	Booster für ein Auto	13
2.4	Stützen	15
2.5	FFD für parametrisierte und nicht parametrisierte Objekte . . .	22
3.1	FFD-Beispiel aus der Bildverarbeitung	27
3.2	Beispiel für lokal zulässige FFD-Funktionen	30
3.3	Übersicht über FFD-Funktionen	33
3.4	Gegenbeispiel: Torusknoten	34
3.5	Übersicht über homotope und injektive FFD-Funktionen . . .	39
3.6	Seil s zwischen P und Q um das Hindernis W	40
3.7	0- und 1-Flexibilität	45
3.8	Beispiele für Deformationen mit Hindernis W	48
3.9	Weitere Beispiele für Deformationen mit Hindernis W	49
3.10	polynomiale FFD-Beispiele	54
3.11	FFD-Transformationen mit der allgemeinen Polynombasis der Ordnung 2, 3, 4	60
3.12	FFD-Transformationen mit der reinen Polynombasis der Ord- nung 2, 3, 4	60
3.13	B-Spline-Rekursionsformel	63
3.14	Spline	64
3.15	Tensorprodukt-B-Splines	66
3.16	Tensorprodukt-B-Spline	67
3.17	iterative FFD-Räume	71
4.1	Bezierkurven s_1^1 und s_1^3	86
4.2	Gewichtsfunktionen zu Hindernisrestriktionen	88

4.3	Boundingbox	93
4.4	s^1 und s^3	97
4.5	Beispiel für Punktfixierung durch Überlagerung	99
6.1	Kissing Number im \mathbb{R}^3	122
7.1	Globale FFD-Optimierung eines Seils	138
7.2	Abnahme der Seillänge durch FFD-Optimierung mit verschiedenen Basisfunktionen	138
7.3	Hinderniskurven c_1 und c_2 zu den Punktfixierungen P, Q	140
7.4	Globale FFD-Optimierung, ohne Überlagerung	141
7.5	Beispiel für Minimalfläche mit Fixierungen, symmetrisch	142
7.6	Flächeninhaltsverlauf zu Beispiel 7.2 und 7.3	142
7.7	Beispiel für Minimalfläche mit Fixierungen, unsymmetrisch	143
7.8	Beispiel für Minimalfläche mit Fixierungen, unsymmetrisch	143
7.9	Beispiel für Minimalfläche mit Hindernis	144
7.10	Beispiel für Minimalfläche mit Quaderhindernis	145
7.11	Beispiel für Minimalfläche mit zwei Würfelhindernissen	145
7.12	Beispiel für Minimalfläche mit zwei Hinderniskugeln	146
7.13	Beispiel für Minimalfläche mit zwei Hinderniskugeln und Fixierung	146
7.14	Fixierte Fläche.	147
7.15	Optimierung mit quadratischen FFD-Funktionen.	148
7.16	Optimierung mit kubischen FFD-Funktionen.	148
7.17	Optimierung einer Platte unter Spannungsnebenbedingungen.	150
7.18	Kreissolid.	151
7.19	Optimierung von Tragflächen.	151
7.20	Geometriedeformation des Boosters	152
7.21	Gewichtsfunktion zum Boosterbeispiel	152
7.22	Federpendel.	154

LITERATURVERZEICHNIS

- [App06] A. App. *Optimierung von Reflektoren in Straßenleuchten mittels Bezier-Raum-Deformation, Dissertation, Universität Stuttgart*. 2006.
- [AS95] P. K. Agarwal and M. Sharir. Algorithmic techniques for geometric optimization. In *Computer science today*, volume 1000 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 234–253. Springer, Berlin, 1995.
- [AST94] P. K. Agarwal, M. Sharir, and S. Toledo. Applications of parametric searching in geometric optimization. *J. Algorithms*, 17(3):292–318, 1994. Third Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (Orlando, FL, 1992).
- [Bar84] A. H. Barr. Global and Local Deformations of Solid Primitives. *Proceedings of SIGGRAPH'84, Computer Graphics*, 17:21–30, July 1984.
- [BJ73] T. Bröcker and K. Jähnich. *Einführung in die Differentialtopologie*. Springer, Berlin, 1973.
- [Bra92] D. Braess. *Finite Elemente*. Springer, Heidelberg, 1992.
- [CA94] Y.-K. Chang and P. R. Alyn. A generalized de Casteljau approach to 3D free-form deformation. *Computer Graphics Proceedings*, 28:257–260, July 1994.
- [CGT00] A. R. Conn, N. I. M. Gould, and P. L. Toint. *Trust-Region Methods*. SIAM, Philadelphia, 2000.
- [CH96] S.-N. Chow and J. K. Hale. *Methods of Bifurcation Theory*. Springer, Berlin, 1996.
- [CK81] L. Collatz and W. Krabs. *Approximationstheorie*. Cambridge University Press, Cambridge, 1981.
- [Coq90] S. Coquillart. Extended free-form deformation: A sculpturing tool for 3D geometric modeling. *Computer Graphics Proceedings*, 24:187–196, August 1990.

- [Die93] P. Dierckx. *Curve and Surface Fitting with Splines*. Clarendon Press, Oxford, 1993.
- [DR94] B. Dasgupta and V. Roychowdhury. Two geometric optimization problems. In *Advances in optimization and approximation*, volume 1 of *Nonconvex Optim. Appl.*, pages 30–57. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.
- [FGJP03] J. Q. Feng, J. M. Guo, X. G. Jin, and Q. S. Peng. Improved accurate free-form deformation of polygonal objects. *Chinese J. Comput.*, 26(9):1137–1145, 2003.
- [GK99] C. Geiger and C. Kanzow. *Numerische Verfahren zur Lösung unrestringierter Optimierungsaufgaben*. Springer, Berlin, 1999.
- [GK02] C. Geiger and C. Kanzow. *Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben*. Springer, Berlin, 2002.
- [Hato2] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [HL92] J. Hoschek and L. Lasser. *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. Teubner, 1992.
- [HM98] J. Haslinger and R.A. Mäkinen. *Introduction to shape optimization : theory, approximation and computation*. Siam, 1998.
- [Hö98] K. Höllig. *Grundlagen der Numerik*. MathText, Zavelstein, 1998.
- [HP83] R. Heine and K. Petry. Bibliographie zur geometrischen optimierung. *Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optim.*, 14(3):467–489, 1983.
- [HR03] K. Höllig and U. Reif. Nonuniform web-splines. *Comput. Aided Geom. Design*, 20(5):277–294, 2003.
- [Hu64] S.-T. Hu. *Elements of General Topology*. Holden-Day, Inc, San Francisco, 1964.
- [Jä80] K. Jähnich. *Topologie*. Springer, Berlin, 1980.
- [Jon98] A. Jones. Discontinuities in geometric optimization. *Austral. Math. Soc. Gaz.*, 25(1):18–20, 1998.
- [KR85] R. Klötzler and H. Rudolph. Zur analytischen and algorithmischen behandlung eines geometrischen optimierungsproblems von j. steiner. *Optimization*, 16(6):833–848, 1985.

- [KS97] M. J. Katz and M. Sharir. An expander-based approach to geometric optimization. *SIAM J. Comput.*, 26(5):1384–1408, 1997.
- [Kü98] E. Kühner. *Grundlagen der Funktionalanalysis und Approximationstheorie*. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1998.
- [MJSG99] J. Majhi, R. Janardan, M. Smid, and P. Gupta. On some geometric optimization problems in layered manufacturing. *Comput. Geom.*, 12(3-4):219–239, 1999.
- [MK96] R. MacCracken and I. Kenneth. Free-form deformations with lattices of arbitrary topology. *Computer Graphics Proceedings*, 30:181–188, August 1996.
- [PT97] L. Piegl and W. Tiller. *The NURBS Book, 2nd Edition*. Springer, Berlin, 1997.
- [PTVF99] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B.P Flannery. *Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing, second edition*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [Rei97] U. Reif. A Refineable Space of Smooth Spline Surfaces of Arbitrary Topological Genus. *Journal of Approximation Theory*, 90:174–199, 1997.
- [Reio0] U. Reif. Best bounds on the approximation of polynomials and splines by their control structure. *Comput. Aided Geom. Design*, 17(6):579–589, 2000.
- [RM93] D. Ruprecht and H. Müller. Free form deformation with scattered data interpolation methods. In *Geometric modelling*, volume 8 of *Comput. Suppl.*, pages 267–281. Springer, Vienna, 1993.
- [Rog90] D. Rogers. *Mathematical Elements for Computer Graphics*. New York, McGraw Hill, 1990.
- [RVR01] W. Rathmann, F. Vogel, and Ritter. Free Form Shape Shell Optimization. *CAD-FEM Users Meeting, Proceedings 19, Sec 2.1.5*, 2:12, 2001.
- [Sau00] F. Sauvigny. *Partielle Differentialgleichungen der Geometrie und der Physik*. Springer, Berlin, 2000.
- [SP86] T. W. Sederberg and S. R. Parry. Free-Form Deformation of Solid Geometric Models. *Proceedings of SIGGRAPH'86, Computer Graphics*, 20:151–160, August 1986.
- [Spe93] P. Spellucci. *Numerische Verfahren der nichtlinearen Optimierung*. Birkhäuser, Basel, 1993.

- [TZ86] A. Törn and A. Zilinska. *Global Optimization*. Springer Verlag, Berlin, New York, 1986.
- [Wat80] G.A. Watson. *Approximation Theory and Numerical Methods*. John Wiley & Sons, Chichester, 1980.
- [Weio6] E. W. Weisstein. Kissing Number. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/KissingNumber.html>, 2006.
- [Wero5] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, Berlin, 2005.
- [WYL⁺02] X. Wang, Z. Ye, H. Li, X. Hu, and Y. Meng. The technique of free-form deformation based on extension function for planar parametric curve. *Gongcheng Shuxue Xuebao*, 19(1):115–119, 67, 2002.
- [Zeio1] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I*. Springer, Berlin, 1991.
- [ZT99] C. Zong and J Talbot. *Sphere Packings*. Springer Verlag, New York, 1999.

Lebenslauf

Am 13. Oktober 1976 wurde ich, Jochen Kai Hechler, als Sohn von Ute und Karl-Heinz Hechler in Langen (Hessen) geboren.

August 83	-	Juli 88	Grundschule in Wixhausen
August 88	-	Juli 90	Förderstufe in Arheilgen
August 90	-	Juni 96	Justus-Liebig-Gymnasium in Darmstadt
Juli 96	-	April 97	Wehrdienst beim Programmierzentrum der Luftwaffe, EIFEL Birkenfeld
April 97	-	Oktober 03	Studium der Mathematik mit Nebenfach Informatik an der TU-Darmstadt